



## รายงานการวิจัย

การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น  
ระหว่างการใช้แบบฝึกทักษะแบบบอคมเมนต์เตด เรียลลิตี้  
กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ

The Comparison of Mathematics Achievement in Identifying Areas of  
General Region by Double Integral between The Use of Augmented  
Reality Exercise Book and Traditional Exercise Book

วีระชัย ท่าดี Weerachai Thadee

เวคิน หนูนำวงศ์ Vekin Nunumvong

คณะศิลปศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย

ได้รับการสนับสนุนทุนวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย  
งบประมาณรายได้ ประจำปี 2563

## บทคัดย่อ

งานวิจัยเรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระหว่างการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ มีวัตถุประสงค์เพื่อ (1) เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระหว่างการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ (2) เพื่อสร้างสื่อการเรียนรู้ในรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ พร้อมทั้งหาประสิทธิภาพของแบบฝึกทักษะ (3) เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ โดยใช้เครื่องมือคือ แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ แบบสอบถาม แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ วิเคราะห์ข้อมูลแบบพรรณนาและใช้สถิติ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และ t-test โดยผลการวิจัยพบว่า (1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาเรื่อง การหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นโดยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ สูงกว่านักศึกษาที่ใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (2) มีการสร้างสื่อการเรียนรู้ในรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ทำงานด้วยระบบปฏิบัติการแอนดรอย ซึ่งเป็นระบบปฏิบัติการที่เป็น Open Source มีการใช้โปรแกรม Unity Game Engine และโปรแกรม Vuforia Augmented Reality SDK เข้ามาพัฒนาแอปพลิเคชันให้มีความน่าสนใจยิ่งขึ้น โดยมีค่าประสิทธิภาพของแบบฝึกทักษะ  $E_1/E_2$  เท่ากับ 80.13/80.25 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดที่ 80/80 (3) ระดับความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ อยู่ในระดับมากที่สุดโดยมีค่าเฉลี่ยอยู่ที่ 4.56

## Abstract

The objectives of this study are; first, is to compare of the achievement of learning on finding any areas using double integrals between the use of the Augmented Reality Skill Training and Normal Skill Training; second, is to create learning materials in the form of the Augmented Reality Skill Training and find the effectiveness of this skill training; and third, is to examine the students satisfaction with the Augmented Reality Skill Training. This study used three instruments as; the Augmented Reality Skill Training, Questionnaire, and the Achievement Test to measure the achievement of learning. Descriptive statistics, for example, mean, and standard deviation were employed to analyze the data. In addition, the t-test was used to compare means between groups. The results revealed that there were significant differences in the achievement of learning on finding any areas using double integrals between the use of the Augmented Reality Skill Training and Normal Skill Training. The results of the study also showed that the learning materials was created in the form of the Augmented Reality Skill Training and learning applications on finding any areas using double integrals with android operating system which is Open Source operating system. In addition, Unity Game Engine and Vuforia Augmented Reality SDK program were used to develop applications for more interesting and the effectiveness of this learning materials ( $E_1/E_2$ ) are 80.13/80.25 in accordance with required criteria at 80/80. Finally, students satisfaction with the Augmented Reality Skill Training was found at the highest level (mean=4.56).

## กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนทุนวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล ศรีวิชัย งบประมาณแผ่นดินประจำปี 2563 เป็นงานวิจัยพื้นฐานเพื่อก่อให้เกิดองค์ความรู้พัฒนาสื่อการเรียนรู้ ในรูปแบบใหม่เพื่อสนับสนุนการเรียนรู้ของนักศึกษาในรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัยที่ได้ให้การสนับสนุนทุนในการทําวิจัยนี้ ขอขอบคุณผู้เกี่ยวข้องทุกฝ่ายที่ได้ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ทั้งความสะดวกในการใช้อุปกรณ์ และเครื่องมือวิเคราะห์ ตลอดจนสถานที่ในการตรวจวิเคราะห์ตัวอย่าง ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ทุกฝ่ายที่ให้การช่วยเหลืออำนวยความสะดวกด้วยดีตลอดมา ขอขอบคุณผู้ร่วมวิจัยที่อุทิศกำลังกายและกำลังใจ ช่วยในการวิจัยครั้งนี้ลุล่วงได้ด้วยดี ตลอดจนครอบครัวและผองเพื่อนที่ให้ความห่วงใย เป็นกำลังใจให้เสมอมา ประโยชน์อันใดที่เกิดจากงานวิจัยนี้ย่อมเป็นผลมาจากความกรุณาของท่านและหน่วยงาน ผู้วิจัยจึงใคร่ขอขอบพระคุณมา ณ โอกาสนี้

วีระชัย ท่าดี

เวคิน หนูนางค์

พฤษภาคม 2564

## สารบัญ

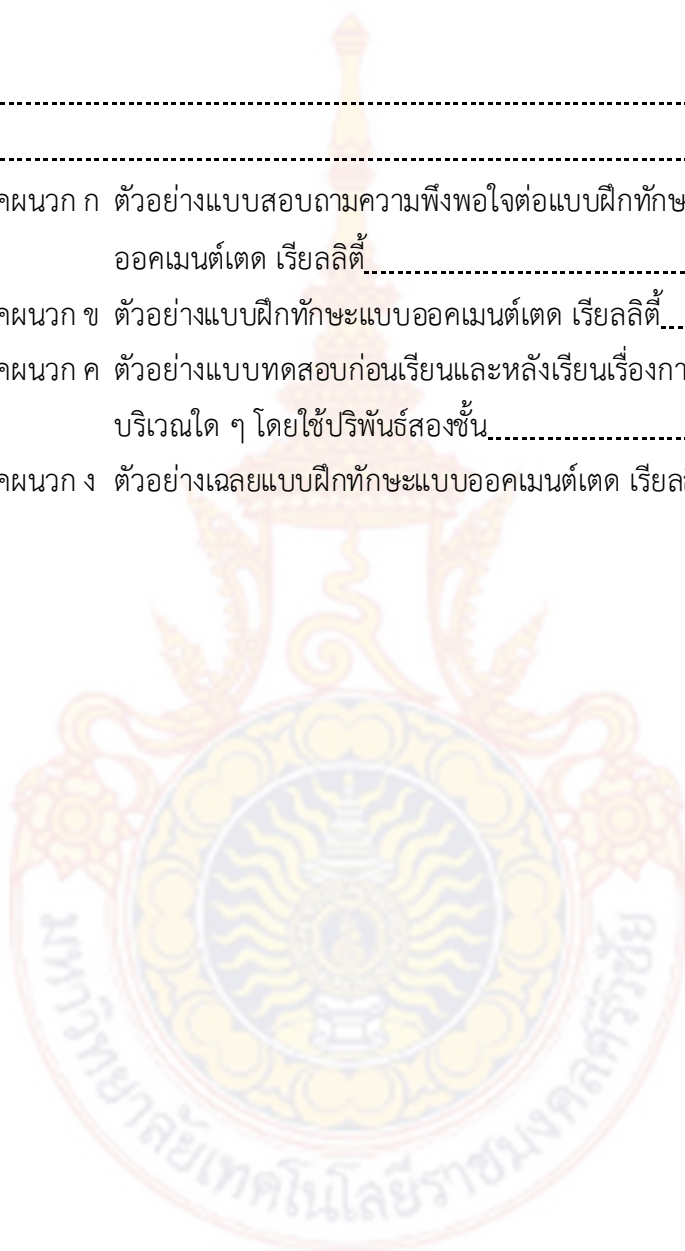
	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ (Abstract).....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญตาราง.....	ช
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย.....	3
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	3
1.4 นิยามศัพท์เฉพาะ.....	4
1.5 ข้อตกลงเบื้องต้น.....	5
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	6
2.1 ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน.....	6
2.2 ความหมายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์.....	7
2.3 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์.....	11
2.4 ความหมายแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์.....	13
2.5 ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์.....	14
2.6 ความหมายแบบฝึกทักษะ.....	16
2.7 ลักษณะของแบบฝึกทักษะที่ดี.....	17
2.8 เทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี.....	20
2.9 การทดสอบประสิทธิภาพ นวัตกรรม สื่อการเรียนการสอน.....	23
2.10 การหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น.....	30
2.11 ความหมายของความพึงพอใจ.....	33
2.12 การวัดความพึงพอใจ.....	34
2.13 งานวิจัยในประเทศ.....	34
2.14 งานวิจัยต่างประเทศ.....	36
2.15 กรอบความคิดในการวิจัย.....	38
2.16 สมมติฐานการวิจัย.....	39

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย .....	40
3.1 ประชากร .....	40
3.2 ขอบเขตด้านเนื้อหา .....	40
3.3 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล .....	40
3.4 วิธีการสร้างเครื่องมือ .....	41
3.5 การสร้างแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ .....	41
3.6 การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน .....	46
3.7 การสร้างแบบสอบถามความพึงพอใจและการนำไปใช้ .....	46
3.8 วิธีดำเนินการทดลอง .....	47
3.9 การเก็บรวบรวมข้อมูล .....	48
3.10 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล .....	48
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล .....	49
4.1 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระหว่างการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ .....	49
4.2 การสร้างสื่อการเรียนรู้ในรูปแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น .....	51
4.3 ระดับความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น .....	54
บทที่ 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ .....	58
5.1 วัตถุประสงค์ของการวิจัย .....	58
5.2 ขอบเขตของการวิจัย .....	58
5.3 สมมติฐานการวิจัย .....	59
5.4 สรุปผลการวิจัย .....	59
5.5 อภิปรายผล .....	60
5.6 ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้ .....	61
5.7 ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป .....	62

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บรรณานุกรม.....	63
ภาคผนวก.....	64
ภาคผนวก ก ตัวอย่างแบบสอบถามความพึงพอใจต่อแบบฝึกทักษะแบบ ออกเมนต์เตด เรียลลิตี้.....	65
ภาคผนวก ข ตัวอย่างแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้.....	66
ภาคผนวก ค ตัวอย่างแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของ บริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น.....	67
ภาคผนวก ง ตัวอย่างเฉลยแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้.....	68



สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
ตารางที่ 4-1 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่ก่อนเรียนด้วยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ด้วยสถิติ Independent Sample t-test.....	49
ตารางที่ 4-2 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาหลังเรียนด้วยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ด้วยสถิติ Independent Sample t-test.....	49
ตารางที่ 4-3 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษากลุ่มควบคุมก่อนเรียนและหลังเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ด้วยสถิติ Dependent Sample t-test	50
ตารางที่ 4-4 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษากลุ่มควบคุมก่อนเรียนและหลังเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ด้วยสถิติ Dependent Sample t-test.....	50
ตารางที่ 4-5 ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อหน้าของบทเรียน.....	54
ตารางที่ 4-6 ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อเนื้อหาของบทเรียน.....	54
ตารางที่ 4-7 ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้ภาษาและการอธิบายวิธีการทำแบบฝึกทักษะแต่ละข้อ.....	55
ตารางที่ 4-8 ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการออกแบบและการจัดรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้.....	56
ตารางที่ 4-9 ความพึงพอใจต่อแอปพลิเคชันที่นำมาใช้กับแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้	56



## บทที่ 1

### บทนำ

#### ความเป็นมาของปัญหา

วิชาคณิตศาสตร์ ถือเป็นศาสตร์ที่ใช้ในการพัฒนาระบบการคิด การวิเคราะห์ การแก้ปัญหา เพื่อเพิ่มพูนทักษะทางการคิดวิเคราะห์ ทักษะทางด้านความรู้ และทักษะทางด้านปัญญา ผู้ที่มีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่มากพอ จะสามารถนำความรู้ในส่วนนี้ไปต่อยอดในการศึกษาในศาสตร์อื่น ๆ ได้อีกมากมาย ไม่ว่าจะเป็นศาสตร์ทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ หรือศาสตร์ทางด้านคอมพิวเตอร์และเทคโนโลยี โดยประสบการณ์ของผู้วิจัยที่ได้ปฏิบัติหน้าที่ในการถ่ายทอดความรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ 2 ให้แก่นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ ในหลาย ๆ ชั้นปีพบว่า เนื่องจากรายวิชาคณิตศาสตร์ 2 จะมีลักษณะของเนื้อหาที่บรรจุอยู่ในรายวิชา เทียบเท่าได้กับคณิตศาสตร์ขั้นสูง (Mathematics Advance) ซึ่งเป็นการนำเอาความรู้พื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์ ในหลาย ๆ เรื่อง เข้ามาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาและการคำนวณ ซึ่งผู้วิจัยพบว่านักศึกษาส่วนใหญ่ ยังขาดความรู้พื้นฐานที่จะมาเติมเต็มในวิชานี้อยู่พอสมควร สังเกตได้จากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาที่มีค่าความต่างกันในหลาย ๆ ระดับ แสดงให้เห็นถึงความแตกต่างกันในเรื่องของความสามารถและความพร้อมในการศึกษาของนักศึกษาอย่างชัดเจน ทั้งนี้สาเหตุของความแตกต่างที่กล่าวมาข้างต้น อาจจะเป็นผลมาจากหลาย ๆ ปัจจัย อาทิเช่น ความใส่ใจในการเรียนและการทบทวนบทเรียนของนักศึกษาเอง วิธีการถ่ายทอดความรู้จากครูผู้สอน สื่อการเรียนรู้ที่นำมาใช้ในรายวิชา สภาพแวดล้อมในการเรียนการสอน หรือแม้กระทั่งความล้ำหลังของเทคโนโลยีที่ใช้ในการเรียนการสอน เป็นต้น ซึ่งปัจจัยข้างต้นล้วนแล้วแต่ส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาโดยตรง ผู้วิจัยเล็งเห็นปัจจัยอย่างหนึ่งที่ค่อนข้างมีผลต่อผู้เรียนในยุคปัจจุบัน คือ ความล้ำหลังของเทคโนโลยีที่นำมาใช้ในการเรียนการสอน เพื่อนำมายกระดับการถ่ายทอด กระตุ้นความน่าสนใจของเนื้อหา หรือแม้กระทั่งทำให้สามารถเข้าใจเนื้อหาได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น อีกทั้งยังเป็นการส่งเสริมพัฒนาการความคิดสร้างสรรค์ในวิชาคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาทักษะด้านต่าง ๆ ที่สำคัญแก่นักศึกษา ซึ่งผู้วิจัยเองก็ไม่อาจจะกล่าวแบบมั่นใจได้ว่าเทคโนโลยีที่นำมาใช้ในการเรียนการสอนรูปแบบใดที่มีความสมบูรณ์แบบและมีประสิทธิภาพมากที่สุด ซึ่งจุดสำคัญที่สุดที่จะส่งเสริมให้เทคโนโลยีที่เข้ามามีบทบาทในการเรียนการสอนมีประสิทธิภาพนั้น ต้องขึ้นอยู่กับความเหมาะสมในการเลือกรูปแบบเทคโนโลยีให้เข้ากับตัวผู้เรียน ลักษณะและเนื้อหาของรายวิชา สภาพแวดล้อม ความสะดวกในการใช้งานให้แก่ผู้เรียนมากที่สุด และตอบโจทย์ที่เป็นวัตถุประสงค์ของการเรียนรู้ได้มากที่สุด ซึ่งจากการศึกษาพบว่ารูปแบบของเทคโนโลยีที่นำมาใช้ในการเรียนการสอนมีด้วยกันหลายรูปแบบ เทคโนโลยีออกเมนต์เตดเรียลลิตี้ (Augmented Reality) ถือเป็นเทคโนโลยีรูปแบบหนึ่งที่ค่อนข้างได้รับความนิยมเป็นอย่างมากในปัจจุบัน ซึ่งตามคำกล่าวของ

จันทกานต์ สถาพรวงษา และ สกนธ์ ม่วงสุน (2557) ได้กล่าวถึงคุณสมบัติพิเศษของเทคโนโลยีสื่อเสมือนจริง ไว้ว่า เทคโนโลยีออกเมนต์ เตดเรียลลิตี้ เป็นเทคโนโลยีที่ผสมผสานโลกแห่งความเป็นจริง (Real) เข้ากับโลกเสมือน (Virtual) โดยผ่านทางอุปกรณ์เช่น Webcam Camera ของคอมพิวเตอร์ Smartphone Tablet หรือแว่นตาพิเศษในการสแกน Portal Media ไม่ว่าจะ เป็น สมุด หนังสือ หรือรูปภาพเพื่อให้สื่อเหล่านั้นสามารถตอบโต้กับผู้ใช้ได้ โดยผู้ใช้จะเห็นภาพที่เป็น Object ทั้งที่เป็น 2D 3D หรือวีดีโอมาซ้อนทับเข้ากับฉากหลังของสื่อเหล่านั้น ๆ ผ่านจอของคอมพิวเตอร์ Smartphone Tablet หรือแว่นตาพิเศษ อภิชาติ อนุกุลเวช และ ภูวดล บัวบางภู (2556) กล่าวว่า AR ย่อมาจาก Augmented Reality ซึ่งอ่านว่า “อ็อกเมนต์เท็ดเรียลลิตี้” เป็นการนำเอาภาพกราฟฟิกของคอมพิวเตอร์ทั้งในรูปแบบที่เป็นสามมิติ (3D) สองมิติ (2D) หรือวีดีโอ มาซ้อนทับเข้ากับฉากหลังซึ่งเป็นภาพในเวลาจริง (Real Time) อดิศักดิ์ มหารวรรณ (2556) กล่าวว่า Augmented Reality หรือ AR เป็นเทคโนโลยีที่ผสมผสานโลกแห่งความเป็นจริง (Real) เข้ากับโลกเสมือน (Virtual) โดยผ่านทางอุปกรณ์ กล้องมือถือ หรือคอมพิวเตอร์ รวมกับการใช้ซอฟต์แวร์ต่าง ๆ ที่จะทำให้เห็นภาพในจอภาพจะเป็น Object 3 มิติ ซึ่งมีมุมมอง 360 องศา ชาติรี ชัยล้อม กิตติศักดิ์ คำผัด เอกชัย ไก่แก้ว ดำรง สุพล และ เรวัช จิตจง กล่าวไว้ว่า สื่อดิจิทัลในโลกแห่ง ความจริงเสมือน (Augmented Reality: AR) เหมาะสำหรับการพัฒนาสื่อที่ใช้กับอุปกรณ์ประเภท Smart Device เช่น ไอโฟน ไอแพด รวมถึงอุปกรณ์คอมพิวเตอร์พกพาต่าง ๆ ที่ใช้ระบบปฏิบัติการ iOS และ Android คุณสมบัติพิเศษของออร์สม่าจะเป็นตัวกลางสำหรับการเชื่อมโยงโลกของความจริง และโลกความเสมือนจริงเข้าด้วยกัน โดยแสดงผลออกมาในรูปแบบสื่อปฏิสัมพันธ์ที่มองเห็น ควบคุม และสัมผัสได้ผ่านทางหน้าจอ ทั้งที่เป็นภาพนิ่งภาพเคลื่อนไหว เสียง การเชื่อมโยงไปยังเว็บไซต์ตามที่กำหนดไว้ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยการพัฒนาหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ เรื่อง ศิลปะการแสดงประจำชาติ ประเทศในประชาคมอาเซียน ด้วยเทคโนโลยีออร์สม่า (Aurusma Technology)

สำหรับเนื้อหาในหัวข้อการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นนั้น เป็นหัวข้อที่นักศึกษามักจะทำความเข้าใจได้ยากเนื่องจาก สิ่งสำคัญที่เป็นที่มาของการเริ่มกระบวนการหาพื้นที่บนบริเวณปิดล้อมใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นนั้น นักศึกษาจะต้องสร้างรูปร่างของบริเวณที่เกิดจากการปิดล้อมของกราฟให้ออกมาก่อน ซึ่งจากประสบการณ์พบว่าในชั้นเรียนนี้นักศึกษาจะมองออกจากรูปที่ผู้สอนสร้างให้เป็นตัวอย่าง ณ เวลานั้นเท่านั้น แต่นักศึกษาจะไม่สามารถสร้างบริเวณปิดล้อมเองได้ในกรณีที่ต้องกลับไปทำแบบฝึกหัด ษะด้วยตนเอง หรือลองทำโจทย์ในขณะที่ไม่มีผู้ที่มีความรู้คอยให้คำแนะนำ และเมื่อสร้างบริเวณปิดล้อมไม่ได้ก็ไม่สามารถที่จะนำปริพันธ์สองชั้นมาใช้ในการคำนวณได้เช่นกัน

จากที่กล่าวมาแล้วข้างต้นทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะทำเอาเทคโนโลยีออกเมนต์เตดเรียลลิตี้ เข้ามาเป็นตัวช่วยในการนำเสนอข้อมูลที่จำเป็นต้องทราบในขณะที่นักศึกษาทำแบบฝึกหัด ษะผ่านรูปแบบของกราฟ 2D หรือ 3D การมีวีดีโอให้คำแนะนำ หรือวีดีโอเฉลยแบบฝึกหัด ที่สามารถเห็นได้ในตัวเล่มแบบฝึกหัด ษะแบบออกเมนต์เตดเรียลลิตี้ ซึ่งถือเป็นความสะดวกแก่ตัวผู้เรียนเองที่จะ

สามารถทบทวนบทเรียนที่ได้ก็ได้ เสมือนมีคนให้คำแนะนำอยู่ข้างกาย ซึ่งสอดคล้องกับ ซึ่งสอดคล้องกับ ลักษณะของแบบฝึกทักษะที่ดีตามคำกล่าวของ สุพรรณิ ไชยเทพ (2544) ว่าต้องเป็นแบบฝึกทักษะที่มีความชัดเจนทั้งคำชี้แจง คำสั่ง และง่ายต่อการทำความเข้าใจ มีภาษาและรูปภาพที่ดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเหมาะสมกับวัยของผู้เรียน มีกิจกรรมหลากหลายรูปแบบทำให้นักเรียนไม่เบื่อ มีการตอบสนองความต้องการและความสนใจของผู้เรียน มีการสร้างความสนุกสนานเพลิดเพลินขณะทำแบบฝึก และมีคำตอบชัดเจน เพื่อจะนำไปสู่การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียน ที่เกิดจากการลงมือทำแบบฝึกทักษะจากเล่มที่สร้างด้วยเทคโนโลยีดังกล่าว ว่ามีความต่างจากการทำแบบฝึกทักษะจากเล่มแบบฝึกทักษะแบบปกติหรือไม่ และจะเป็นการพัฒนาตัวเล่มของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ให้กลายเป็นนวัตกรรมทางการศึกษาใหม่ ๆ ที่จะสร้างประโยชน์ต่อไป

### วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระหว่างการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ
2. เพื่อสร้างสื่อการเรียนรู้ในรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ พร้อมทั้งหาประสิทธิภาพของแบบฝึกทักษะ
3. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

### ขอบเขตของการวิจัย

ประชากร คือ นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย สงขลา ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 222 คน

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย สงขลา ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 2 กลุ่มเรียน กลุ่มละ 45 คน เลือกตัวอย่างโดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Sampling) และเลือกให้วิธีการทดลองให้กับกลุ่มตัวอย่างโดยการจับฉลาก

ขอบเขตด้านเนื้อหา ในการวิจัยครั้งนี้ใช้เนื้อหาเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรต้น คือ การใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ

ตัวแปรตาม คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น และความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเลือกศึกษาในสามประเด็นคือ

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นระหว่างกลุ่มนักศึกษาที่ใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับกลุ่มของนักศึกษาที่ใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ
2. สื่อการเรียนรู้ในรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และประสิทธิภาพของแบบฝึกทักษะ
3. ศึกษาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

### นิยามศัพท์เฉพาะ

แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ หมายถึง สื่อที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมาเพื่อให้ผู้เรียนใช้ในการเสริมสร้างทักษะ โดยเรียงเนื้อหาที่เกี่ยวข้องจากง่ายไปยาก มีลักษณะเป็นโจทย์ปัญหาให้ผู้เรียนได้ฝึกแก้ปัญหา มีการทบทวนเนื้อหาที่จำเป็นและเป็นสิ่งที่ผู้เรียนได้ศึกษามาแล้วก่อนหน้านี้ เพื่อให้ผู้เรียนพัฒนาความสามารถของตนเอง โดยโจทย์แต่ละข้อที่ผู้เรียนได้ทำ จะมีเฉลยทั้งในรูปแบบของการพิมพ์บรรยายวิธีทำ และเฉลยในรูปแบบของวิดีโอพร้อมคำบรรยายจากผู้วิจัย

แบบฝึกทักษะแบบปกติ หมายถึง สื่อที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมาเพื่อให้ผู้เรียนใช้ในการเสริมสร้างทักษะ มีโจทย์ปัญหาให้ผู้เรียนฝึกแก้ปัญหาโดยเรียงเนื้อหาจากง่ายไปยากและมีเฉลยเพียงคำตอบสุดท้ายหรือพิมพ์บรรยายด้วยวิธีการโดยย่อ

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คะแนนดิบที่ได้จากการทำแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นซึ่งมีลักษณะเป็นแบบทดสอบปรนัย ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ

ประสิทธิภาพของแบบฝึกทักษะ เกณฑ์ 80/80 หมายถึง ระดับประสิทธิภาพ ของแบบฝึกทักษะที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดทักษะและความเข้าใจในการแก้ปัญหาและการคำนวณ เป็นระดับที่ผู้ผลิตแบบฝึกทักษะจะพึงพอใจ

80 ตัวแรก หมายถึง ร้อยละของคะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาทั้งหมดที่ได้จากการทำแบบทดสอบย่อยระหว่างเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

80 ตัวหลัง หมายถึง ร้อยละของคะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาทั้งหมดหลังจากการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

ค่าดัชนีประสิทธิผลแบบฝึกทักษะ หมายถึงค่าเปรียบเทียบสัดส่วนคะแนนเฉลี่ยความก้าวหน้าในการเรียนรู้ก่อนเรียนและหลังการเรียนที่ผู้เรียนได้เรียนจากการใช้แบบฝึกทักษะที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

### ข้อตกลงเบื้องต้น

ในการแปลผลค่าเฉลี่ยจากการตอบแบบสอบถามความพึงพอใจนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ผู้วิจัยกำหนดไว้ดังนี้

ค่าเฉลี่ย 4.50 - 5.00 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ อยู่ในระดับมากที่สุด

ค่าเฉลี่ย 3.50 - 4.49 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์  
เตด เรื่อยลืที อยู่ในระดับมาก

ค่าเฉลี่ย 2.50 - 3.49 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์  
เตด เรื่อยลืที อยู่ในระดับปานกลาง

ค่าเฉลี่ย 1.50 - 2.49 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์  
เตด เรื่อยลืที อยู่ในระดับน้อย

ค่าเฉลี่ย 1.00 - 1.49 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์  
เตด เรื่อยลืที อยู่ในระดับน้อยที่สุด



## บทที่ 2

### เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ผู้วิจัยจะนำเสนอเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

ความหมายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
 ความหมายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์  
 สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์  
 ความหมายแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์  
 ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์  
 ความหมายแบบฝึกทักษะ  
 ลักษณะของแบบฝึกทักษะที่ดี  
 เทคโนโลยีออคเมนต์เตด เรียลลิตี้  
 การทดสอบประสิทธิภาพ นวัตกรรม สื่อการเรียนการสอน  
 การหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น  
 ความหมายของความพึงพอใจ  
 การวัดความพึงพอใจ  
 งานวิจัยในประเทศ  
 งานวิจัยต่างประเทศ  
 กรอบความคิดในการวิจัย  
 สมมติฐานการวิจัย

#### ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนั้นจะกล่าวถึง ความสามารถ ความสำเร็จ การเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม คุณลักษณะและความรู้ของผู้เรียนที่ได้รับจากกระบวนการเรียนการสอน โดยมีผู้ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ไว้หลายท่าน ดังนี้

สมพร เชื้อพันธ์ (2547 : 53) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึงความสามารถ ความสำเร็จ และสมรรถภาพด้านต่าง ๆ ของผู้เรียนที่ได้จากการเรียนรู้ อันเป็นผลมาจากการเรียนการสอน การฝึกฝนหรือประสบการณ์ของแต่ละบุคคล ซึ่งสามารถวัดได้จากการทดสอบด้วยวิธีการต่าง ๆ

Good and others (1973 : 103) ให้ความหมายไว้ว่า ผลสัมฤทธิ์ (Achievement) หมายถึงความสำเร็จ ความคล่องตัว ความชำนาญในทักษะหรือประยุกต์ใช้ความรู้ต่าง ๆ ส่วนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (Academic Achievement) หมายถึง ความรู้หรือทักษะอันเกิดจากการเรียนรู้ในวิชาต่าง ๆ ที่ได้เรียนมาแล้ว ซึ่งได้จากผลการทดสอบของครูผู้สอน หรือผู้รับผิดชอบในการสอน หรือทั้งสองอย่างรวมกัน

ไพโรจน์ คะเซนทร์ (2556 : 89) ให้คำจำกัดความผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนว่า คือคุณลักษณะ รวมถึงความรู้ ความสามารถของบุคคลอันเป็นผลมาจากการเรียนการสอน หรือ มวลประสบการณ์ที่ปวงที่บุคคลได้รับการเรียนการสอน ทำให้บุคคลเกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมในด้านต่าง ๆ ของสมรรถภาพทางสมอง ซึ่งมีจุดมุ่งหมายเพื่อเป็นการตรวจสอบระดับความสามารถสมองของบุคคลว่าเรียนแล้วรู้อะไรบ้าง และมีความสามารถด้านใดมากน้อยเท่าไร ตลอดจนผลที่เกิดขึ้นจากการเรียน การฝึกฝนหรือประสบการณ์ต่าง ๆ ทั้งในโรงเรียน ที่บ้าน และสิ่งแวดล้อมอื่น ๆ รวมทั้งความรู้สึก ค่านิยม จริยธรรมต่าง ๆ ก็เป็นผลมาจากการฝึกฝนด้วย

ศิริชัย กาญจนวาสี (2544 : 124-125) ได้ให้คำนิยามของผลสัมฤทธิ์ว่า เป็นการเรียนรู้ตามแผนที่กำหนดไว้ล่วงหน้า อันเกิดจากกระบวนการเรียนการสอนในช่วงระยะเวลาใดเวลาหนึ่ง

ปราณี กองจินดา (2549 : 42) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ความสามารถหรือผลสำเร็จ ที่ได้รับจากกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมและประสบการณ์เรียนรู้ทางด้านพุทธิพิสัย จิตพิสัย และทักษะพิสัย และยังได้จำแนกผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไว้ตามลักษณะของวัตถุประสงค์ของการเรียนการสอนที่แตกต่างกัน

พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์ และเพียว ยินดีสุข (2548 : 125) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ขนาดของความสำเร็จที่ได้จากกระบวนการเรียนการสอน

อารีย์ วชิรวารการ (2542 : 143) ได้ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ผลที่เกิดขึ้นจากการเรียนการสอนการฝึกฝน หรือ ประสบการณ์ต่าง ๆ ทั้งที่โรงเรียน ที่บ้าน และสิ่งแวดล้อมอื่น ๆ

### ความหมายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ คือ ผลที่ชี้แสดงถึงระดับการเรียนรู้ของผู้เรียน ที่ได้จากการเรียนการสอน การฝึกทักษะ การฝึกประสบการณ์ เช่น ความรู้ ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ และการวิเคราะห์ ซึ่งเป็นผลมาจากการวัดด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ โดยมีผู้ให้ความหมายเกี่ยวกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

สมพร เชื้อพันธ์ (2547 : 53) สรุปว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถ ความสำเร็จและสมรรถภาพด้านต่าง ๆ ของผู้เรียนที่ได้จากการเรียนรู้อันเป็นผลมาจากการเรียนการสอน การฝึกฝนหรือประสบการณ์ของแต่ละบุคคลซึ่งสามารถวัดได้จากการทดสอบด้วยวิธีการต่าง ๆ

ฐิตียา เกตุคำ (2551: 46) ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถทางสติปัญญาในการเรียนรู้จากการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งประเมินได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหรือจากงานที่ได้รับมอบหมาย

Wilson. (1971 : 643-696) ได้กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถทางสติปัญญา (Cognitive Domain) ในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ โดยเขาอ้างอิง

ลำดับชั้นของพฤติกรรมพุทธิพิสัย ตามกรอบแนวคิดของบลูม (Bloom 's Taxonomy) ไว้เป็น 4 ระดับ คือ

1. ความรู้ความจำด้านการคิดคำนวณ (Computation) พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับต่ำที่สุด แบ่งออกได้เป็น 3 ชั้นดังนี้

1.1 ความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง (Knowledge of Specific facts) คำถามที่วัดความสามารถในระดับเกี่ยวกับข้อเท็จจริง ตลอดจนความรู้พื้นฐานซึ่งนักเรียนได้สั่งสมมาเป็นระยะเวลาอันแล้วด้วย

1.2 ความรู้ความจำเกี่ยวกับศัพท์ และนิยาม (Knowledge of terminology) เป็นความสามารถในการระลึกหรือจำศัพท์และนิยามต่าง ๆ ได้ โดยคำถามอาจจะถามโดยตรงหรือโดยอ้อมก็ได้ แต่ไม่ต้องอาศัยการคิดคำนวณ

1.3 ความสามารถในการใช้กระบวนการคิดคำนวณ (Ability to carry out Algorithms) เป็นความสามารถในการใช้ข้อเท็จจริงหรือนิยาม และกระบวนการที่ได้เรียนมาแล้วมาคิดคำนวณตามลำดับขั้นตอนที่เคยเรียนรู้มาแล้ว ข้อสอบวัดความสามารถด้านนี้ต้องเป็นโจทย์ง่าย ๆ คล้ายคลึงกับตัวอย่าง นักเรียนไม่ต้องพบกับความยุ่งยากในการตัดสินใจเลือกใช้กระบวนการ

2. ความเข้าใจ (Comprehension) เป็นพฤติกรรมที่ใกล้เคียงกับพฤติกรรมระดับความรู้ความจำเกี่ยวกับการคิดคำนวณแต่ซับซ้อนกว่าแบ่งได้เป็น 6 ชั้นตอน ดังนี้

2.1 ความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติ (Knowledge of Concepts) เป็นความสามารถที่ซับซ้อนกว่าความรู้ความจำเกี่ยวกับข้อเท็จจริง เพราะมโนคติเป็นนามธรรม ซึ่งประมวลจากข้อเท็จจริงต่าง ๆ ต้องอาศัยการตัดสินใจในการตีความหรือยกตัวอย่างใหม่ที่แตกต่างไปจากที่เคยเรียน

2.2 ความเข้าใจเกี่ยวกับหลักการ กฎ ทางคณิตศาสตร์ และการสรุปอ้างอิงเป็นกรณีทั่วไป (Knowledge of Principles, Rules and Generalizations) เป็นความสามารถในการนำเอาหลักการ กฎ และความเข้าใจเกี่ยวกับมโนคติไปสัมพันธ์กับโจทย์ปัญหา จนได้แนวทางในการแก้ปัญหาได้ ถ้าคำถามนั้นเป็นคำถามเกี่ยวกับหลักการและกฎ ที่นักเรียนเพิ่งเคยพบเป็นครั้งแรก อาจจัดเป็นพฤติกรรมในระดับการวิเคราะห์ก็ได้

2.3 ความเข้าใจในโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Knowledge of Mathematical Structure) คำถามที่วัดพฤติกรรมระดับนี้เป็นคำถามที่วัดเกี่ยวกับคุณสมบัติของระบบจำนวนและโครงสร้างทางพีชคณิต

2.4 ความสามารถในการเปลี่ยนรูปแบบปัญหา จากแบบหนึ่งเป็นอีกแบบหนึ่ง (Ability to Transform Problem From One Mode to Another) เป็นความสามารถในการแปลข้อความที่กำหนดให้ เป็นข้อความใหม่หรือภาษาใหม่ เช่น แปลจากภาษาพูดให้เป็นสมการซึ่งมีความหมายคงเดิม โดยไม่รวมถึงกระบวนการคิดคำนวณ (Algorithms) หลังจากแปลแล้วอาจกล่าวได้ว่าเป็นพฤติกรรมที่ง่ายที่สุดของพฤติกรรมระดับความเข้าใจ



2.5 ความสามารถในการติดตามแนวของเหตุผล (Ability to Follow A Line of Reasoning) เป็นความสามารถในการอ่านและเข้าใจข้อความทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแตกต่างไปจากความสามารถในการอ่านทั่ว ๆ ไป

2.6 ความสามารถในการอ่านและตีความโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Ability to Read and Interpret a Problem) ข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นนี้อาจดัดแปลงมาจากข้อสอบที่วัดความสามารถในขั้นอื่น ๆ โดยให้นักเรียนอ่านและตีความโจทย์ปัญหาซึ่งอาจจะอยู่ในรูปของข้อความ ตัวเลข ข้อมูล ทางสถิติ หรือกราฟ

3. การนำไปใช้ (Application) เป็นความสามารถในการตัดสินใจแก้ปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย เพราะคล้ายกับปัญหาที่นักเรียนประสบอยู่ ในระหว่างเรียนหรือแบบฝึกหัดที่นักเรียนเลือก กระบวนการแก้ปัญหาและดำเนินการแก้ปัญหาได้โดยไม่ยาก พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งออกเป็น 4 ขั้น คือ

3.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับปัญหาที่ประสบอยู่ในระหว่างเรียน (Ability to Solve Routine Problems) นักเรียนต้องอาศัยความสามารถในระดับ ความเข้าใจและเลือก กระบวนการแก้ปัญหาจนได้คำตอบออกมา

3.2 ความสามารถในการเปรียบเทียบ (Ability to Make Comparisons) เป็นความสามารถในการค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด เพื่อสรุปการตัดสินใจ ซึ่งในการแก้ปัญหาขั้นนี้อาจต้องใช้ วิธีการคิดคำนวณและจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งความสามารถในการคิดอย่างมี เหตุผล

3.3 ความสามารถในการวิเคราะห์ข้อมูล (Ability to Analyze Data) เป็นความสามารถในการตัดสินใจอย่างต่อเนื่องในการหาคำตอบจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งอาจต้องอาศัยการแยกข้อมูลที่ เกี่ยวข้องออกจากข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง พิจารณาว่า อะไรคือข้อมูล ที่ต้องการเพิ่มเติม มีปัญหาอื่น ไตบ้าง ที่อาจเป็นตัวช่วยในการหาคำตอบของปัญหาที่กำลังประสบอยู่หรือต้องแยกโจทย์ปัญหาออก พิจารณาเป็น ส่วน ๆ มีการตัดสินใจหลายครั้งอย่างต่อเนื่องตั้งแต่ต้นจนได้คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ ต้องการ

3.4 ความสามารถในการมองเห็นแบบลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและการสมมาตร (Ability to Recognize Patterns, Isomorphisms, and Symmetries) เป็นความสามารถที่ต้อง อาศัยพฤติกรรมอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่การระลึกถึงข้อมูล ที่กำหนดให้การเปลี่ยนรูป ปัญหาการจัด กระทำกับข้อมูล และการระลึกถึงความสัมพันธ์ นักเรียนต้องสำรวจหาสิ่งที่คุ้นเคยกันจากข้อมูลหรือ สิ่งที่กำหนดจากโจทย์ปัญหาให้พบ

4. การวิเคราะห์ (Analysis) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาที่นักเรียนไม่เคยเห็น หรือไม่เคย ทำแบบฝึกหัดมาก่อน ซึ่งส่วนใหญ่เป็นโจทย์พลิกแพลง แต่ก็อยู่ในขอบเขตเนื้อหาวิชาที่เรียน การ แก้ปัญหาโจทย์ดังกล่าว ต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมารวมกับความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกัน

เพื่อแก้ปัญหา พฤติกรรมในระดับนี้ถือว่าเป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ซึ่งต้องใช้ สมรรถภาพสมองระดับสูง แบ่งเป็น 5 ชั้น คือ

4.1 ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยประสบมาก่อน (Ability to Solve Nonroutine Problems) คำถามในชั้นนี้เป็นคำถามที่ซับซ้อน ไม่มีในแบบฝึกหัดหรือตัวอย่างไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ผสมผสานกับความเข้าใจ มโนคติ นิยาม ตลอดจนทฤษฎี ต่าง ๆ ที่เรียนมาแล้วเป็นอย่างดี

4.2 ความสามารถในการหาความสัมพันธ์ (Ability to Discover Relationships) เป็นความสามารถในการจัดส่วนต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้ใหม่ แล้วสร้างความสัมพันธ์ขึ้นใหม่เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาแทนการจำความสัมพันธ์ที่เคยพบแล้วมาใช้กับข้อมูลชุดใหม่เท่านั้น

4.3 สามารถในการพิสูจน์ (Ability to Construct Proofs) เป็นความสามารถในการพิสูจน์ โจทย์ปัญหาที่ไม่เคยเห็นมาก่อน นักเรียนจะต้องอาศัยนิยาม ทฤษฎีต่าง ๆ เรียนมาแล้วมาช่วยในการแก้ปัญหา

4.4 ความสามารถในการวิจารณ์การพิสูจน์ (Ability to Criticize Proofs) ความสามารถ ในชั้นนี้เป็นการใช้เหตุผลที่ควบคู่กับความสามารถในการเขียนพิสูจน์ แต่ความสามารถในการวิจารณ์เป็นพฤติกรรมที่ยุ่ยากซับซ้อนกว่า ความสามารถในชั้นนี้ต้องให้นักเรียนมองเห็นและเข้าใจการพิสูจน์ว่า ถูกต้องหรือไม่ มีตอนใดผิดพลาดไปจากมโนคติ หลักการ กฎ นิยาม หรือวิธีการทางคณิตศาสตร์

4.5 ความสามารถเกี่ยวกับการสร้างสูตรและทดสอบความถูกต้องของสูตร (Ability to Formulate and Validate Generalizations) นักเรียนสามารถสร้างสูตรขึ้นมาใหม่ โดยให้สัมพันธ์กับเรื่อง เดิมและสมเหตุสมผลด้วยคือ การจะถามให้หาและพิสูจน์ประโยคทางคณิตศาสตร์หรืออาจถามให้นักเรียน สร้างขบวนการคิดคำนวณใหม่พร้อมทั้งแสดงการใช้ขบวนการนั้น

### สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

อารีย์ ศรีเดือน (2547 : 60) กล่าวถึงสาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ไว้ว่า สาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ก็คือทักษะการจัดกระบวนการเรียนการสอน วิธีการสอนของครูตลอดจนเจตคติในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ครูซึ่งมีหน้าที่โดยตรงจำเป็นต้องหาวิธีการสอนที่หลากหลายให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพมากที่สุด

ทิพสุคนธ์ ศรีแก้ว (2546 : 57) กล่าวถึงสาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ว่าเกิดจากวุฒิภาวะ เจตคติต่อคณิตศาสตร์ สภาพแวดล้อม และที่สำคัญคือการจัดการเรียนการสอน

ไกรฤกษ์ พลพา (2551 : 64) กล่าวถึงสาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหาต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ว่าเกิดจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู ทำให้เกิดเจตคติไม่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนการไม่มีส่วนร่วมในกิจกรรมต่าง ๆ ของผู้เรียน ซึ่งเป็นสาเหตุสำคัญที่ครูผู้สอน

จะต้องหาวิธีแก้ไขเพื่อให้ผู้เรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ และสามารถพัฒนาความสามารถที่ผู้เรียนมี โดยครูผู้สอนจะต้องหาวิธีที่เหมาะสมมาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ที่สามารถส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดทักษะในการคิดคำนวณ การได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเองและเสริมสร้างเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ต่อตนเองและผู้อื่นได้ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น

Rawat and Gupta (1970 : 7-9) ได้กล่าวถึงสาเหตุที่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการต่ำ มีดังนี้

1. นักเรียนขาดความรู้สึกในการมีส่วนร่วมที่โรงเรียน
2. ความไม่เหมาะสมของการจัดเวลาเรียน
3. ผู้ปกครองไม่เอาใจใส่ในการศึกษาบุตร
4. นักเรียนมีสุขภาพไม่สมบูรณ์
5. ความยากจนของผู้ปกครอง
6. ประเพณีทางสังคม ความเชื่อที่ไม่เหมาะสม
7. โรงเรียนไม่มีการปรับปรุงที่ดี
8. การสอบตกซ้ำชั้นเพราะการวัดผลไม่ดี
9. อายุน้อยหรือมากเกินไป
10. สาเหตุอื่น ๆ เช่น การคมนาคมไม่สะดวก

เป็นต้น

วัชร บุรณสิงห์ (2525 : 435) กล่าวถึงสาเหตุที่ทำให้เกิดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ว่าเป็นนักเรียนที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. ระดับสติปัญญา (I.Q.) อยู่ระหว่าง 75-90 และคณะผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์จะต่ำกว่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 30
2. อัตราการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์จะต่ำกว่านักเรียนอื่น ๆ
3. มีความสามารถทางการอ่านต่ำ
4. จำหลักหรือมโนคติเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ที่เรียนไปแล้วไม่ได้
5. มีปัญหาในการใช้ถ้อยคำ
6. มีปัญหาในการหาความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ และการสรุปเป็นหลักเกณฑ์โดยทั่วไป
7. มีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์น้อย สืบเนื่องจากการสอบตกวิชาคณิตศาสตร์บ่อยครั้ง
8. มีเจตคติที่ไม่ดีต่อโรงเรียนและโดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อวิชาคณิตศาสตร์
9. มีความกดดันและรู้สึกกังวลต่อความล้มเหลวทางด้านการศึกษาของตนเองและบางครั้งรู้สึก

ดู ถูกตนเอง

10. ขาดความเชื่อมั่นในความสามารถของตนเอง
11. อาจมาจากครอบครัวที่มีสภาพแวดล้อมแตกต่างจากนักเรียนอื่น ๆ ซึ่งมีผลทำให้ขาดประสบการณ์ที่จำเป็นต่อความสำเร็จในการเรียน

12. ขาดทักษะในการฟัง และไม่มีความตั้งใจในการเรียน หรือมีความตั้งใจในการเรียนเพียงชั่วระยะเวลาสั้น ๆ
13. มีข้อบกพร่องในด้านสุขภาพ เช่น สายตาไม่ปกติมีปัญหาด้านการฟัง และมีข้อบกพร่องทางทักษะการใช้มือ
14. ไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนทั่ว ๆ ไป
15. ขาดความสามารถในการแสดงออกทางคำพูด ซึ่งทำให้ไม่สามารถใช้คำถามแสดงให้เห็นว่าตนเองก็ยังไม่เข้าใจในการเรียนนั้น ๆ
16. มีวุฒิภาวะค่อนข้างต่ำกว่าทั้งทางด้านอารมณ์และสังคม

### ความหมายแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์คือแบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้ ความเข้าใจ ทักษะ ความสามารถของผู้เรียนที่ได้จากการเรียนการสอนในสภาพปัจจุบันของแต่ละบุคคล โดยมีผู้ให้ความหมายของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ไว้หลายท่าน ดังนี้

ภัทรา นิคมานนท์ (2543 : 23) กล่าวว่าแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หมายถึงแบบทดสอบ ที่มุ่งวัดทักษะ ความรู้ สมรรถภาพด้านต่าง ๆ ที่ได้รับจากประสบการณ์ทั้งปวง และมุ่งวัดทางด้านวิชาการเป็นสำคัญ

มณชิตา เรืองรัมย์ (2556 : 16) ให้ความหมายของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งหมายถึง แบบทดสอบที่ใช้วัดทางด้านความรู้ (Cognitive Domain) ได้แก่ ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ วิเคราะห์ สังเคราะห์และประเมินค่า ลักษณะของแบบทดสอบมีสองประการคือ แบบปรนัย (ประกอบด้วยข้อสอบแบบถูกผิด จับคู่ เติมคำหรือแบบตอบสั้น และเลือกตอบ) และอัตนัย ในการออกข้อสอบ ผู้ออกข้อสอบจะสร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตร ซึ่งประกอบด้วยจุดประสงค์การเรียนรู้หรือเนื้อหา กับพฤติกรรมที่จะวัด โดยผู้ออกข้อสอบต้องวิเคราะห์ว่าในแต่ละจุดประสงค์การเรียนรู้หรือเนื้อหาต่าง ๆ นั้น จะวัดพฤติกรรมใดบ้าง พฤติกรรมละก็ข้อ เช่นการวิเคราะห์พฤติกรรมของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหา 4 เรื่องคือ การบวก การลบ การคูณ และการหาร

สมบูรณ์ ตันยะ (2545 : 143) ได้ให้ความหมายว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบทดสอบที่ใช้สำหรับวัดพฤติกรรมทางสมองของผู้เรียนว่ามีความรู้ ความสามารถในการเรียนรู้อย่างไร หรือได้รับการฝึกฝนอบรมมาแล้วมากน้อยเพียงใด

พิชิต ฤทธิ์จรูญ (2544 : 95) กล่าวว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้ ทักษะ และความสามารถทางวิชาการที่ผู้เรียนได้เรียนรู้อย่างไร ว่าบรรลุผลสำเร็จตามจุดประสงค์ที่กำหนดไว้เพียงใด

สมพร เชื้อพันธ์ (2547 : 59) กล่าวว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึงแบบทดสอบหรือชุดของข้อสอบที่ใช้วัดความสำเร็จหรือความสามารถในการทำกิจกรรมการเรียนรู้

ของนักเรียนที่เป็นผลมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครูผู้สอนว่าผ่านจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ตั้งไว้เพียงใด

สิริพร ทิพย์คง (2545 : 193) กล่าวว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึงชุดคำถามที่มุ่งวัดพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนว่ามีความรู้ ทักษะ และสมรรถภาพด้านสมรรถภาพด้านต่างๆ ในเรื่องที่เรียนรู้ไปแล้วมากน้อยเพียงใด

### ขั้นตอนการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

พรเพ็ญ ฤทธิลัน (2554) ได้กล่าวถึงหลักการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ไว้ดังนี้  
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีขั้นตอนการสร้างแบ่งได้ 3 ขั้นตอนใหญ่ ๆ คือ  
ขั้นที่ 1 ขั้นตอนวางแผนการสร้างแบบทดสอบ ประกอบด้วย

1. กำหนดจุดมุ่งหมายของการทดสอบ สิ่งสำคัญประการแรกของผู้สร้างข้อสอบจะต้องรู้ คืออะไรคือจุดมุ่งหมายของการทดสอบ ทำไมจึงต้องมีการสอบ และจะนำผลการสอบไปใช้อย่างไร
2. กำหนดเนื้อหาและพฤติกรรมที่ต้องการวัด เนื้อหาที่ต้องการวัดได้จากจุดมุ่งหมายของการทดสอบ ผู้สร้างข้อสอบจะต้องวิเคราะห์จำแนกเนื้อหาที่ต้องการวัดให้ครอบคลุมเนื้อหาทั้งหมดสำหรับพฤติกรรมที่ต้องการวัดนั้นอาจจำแนกตามทฤษฎีใดทฤษฎีหนึ่ง เช่น ทฤษฎีของบลูม (Benjamin S. Bloom) ซึ่งจำแนกพฤติกรรมเป็น 6 ระดับ คือ ความรู้ ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ การประเมินค่า เป็นต้น
3. กำหนดลักษณะหรือรูปแบบของแบบทดสอบ อาจเลือกแบบทดสอบประเภทความเรียงหรือแบบทดสอบอัตนัย (Subjective Test) แบบตอบสั้นและเลือกตอบหรือแบบทดสอบแบบปรนัย (Objectives Test) ซึ่งขึ้นอยู่กับจุดมุ่งหมายของการทดสอบนั้น
4. การจัดทำตารางวิเคราะห์เนื้อหาและพฤติกรรมที่ต้องการวัด เป็นการวางแผนผังการสร้างข้อสอบ ทำให้ผู้สร้างข้อสอบรู้ว่าในแต่ละเนื้อหาจะต้องสร้างข้อสอบในพฤติกรรมใดบ้าง พฤติกรรมละกี่ข้อ
5. กำหนดส่วนอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการสอบ เช่นคะแนน ระยะเวลาการสอบ

ขั้นที่ 2 ขั้นตอนดำเนินการสร้างข้อสอบ เป็นการเขียนข้อสอบ ตามเนื้อหา พฤติกรรมและรูปแบบของแบบทดสอบที่กำหนดไว้โดยจัดทำเป็นแบบทดสอบฉบับร่าง

ขั้นที่ 3 ขั้นตรวจสอบคุณภาพข้อสอบก่อนนำไปใช้ เมื่อสร้างแบบทดสอบแล้วจึงนำแบบทดสอบไปทดลองใช้เพื่อตรวจสอบคุณภาพ ซึ่งคุณภาพของแบบทดสอบอาจพิจารณาทั้งคุณภาพของแบบทดสอบรายข้อ ได้แก่ ความยาก (difficulty) และอำนาจจำแนก (discrimination) และคุณภาพของแบบทดสอบทั้งฉบับ ได้แก่ ความเที่ยงตรง (validity) และความเชื่อมั่น (reliability) การตรวจสอบสามารถทำได้ทั้งตรวจสอบเองและให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจ การตรวจเองเป็นการตรวจสอบคุณภาพของข้อคำถาม - คำตอบตามหลักการสร้างข้อสอบที่ดี สำหรับการตรวจโดยผู้เชี่ยวชาญจะเป็น

การตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา เพื่อดูว่าข้อคำถามแต่ละข้อสัมพันธ์สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของการวัดหรือไม่ ครอบคลุมเนื้อหาและเป็นตัวแทนของเนื้อหาที่กำหนดหรือไม่ แบบทดสอบที่ดีควรมีคุณสมบัติ ดังนี้

1. ความเชื่อมั่น (Reliability) เป็นความคงเส้นคงวาของคะแนนที่ได้จากการทดสอบโดยใช้แบบทดสอบนั้นหลายๆ ครั้งกับผู้เข้าสอบกลุ่มเดียวกัน ความเชื่อมั่นเป็นคุณภาพของแบบทดสอบที่ฉบับ มีค่าตั้งแต่ 0 – 1 โดยมีแนวทางในการพิจารณา ดังนี้

1.1 ถ้าความเชื่อมั่นน้อยกว่า 0.70 หมายความว่าความน่าเชื่อถือค่อนข้างต่ำ (ควรปรับปรุง)

1.2 ถ้าความเชื่อมั่นมากกว่าหรือเท่ากับ 0.70 หมายความว่าความน่าเชื่อถือยอมรับได้ (สังคม/มนุษยศาสตร์)

1.3 ถ้าความเชื่อมั่นมากกว่าหรือเท่ากับ 0.80 หมายความว่าความเชื่อถือยอมรับได้ (วิทยาศาสตร์/คณิตศาสตร์)

1.4 ถ้าความเชื่อมั่นมากกว่าหรือเท่ากับ 0.90 หมายความว่าความน่าเชื่อถือได้มาตรฐานระดับสากล

2. ความเที่ยงตรง (Validity) เป็นความสอดคล้องของแบบทดสอบกับวัตถุประสงค์ในการวัด ได้ตรงกับสิ่งที่ต้องการจะวัด ความเที่ยงตรงแบ่งเป็นสามประเภทคือ

2.1 ความเที่ยงตรงตามเนื้อหา (Content Validity) หมายถึงคุณสมบัติของแบบทดสอบที่สามารถวัดเนื้อหาวิชาได้ตรงตามที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

2.2 ความเที่ยงตรงตามเกณฑ์ (Criterion-Related Validity) หมายถึงคุณสมบัติของแบบทดสอบที่สามารถนำคะแนนจากการทดสอบนั้นมาใช้ในการพยากรณ์ผลการเรียนได้

2.3 ความเที่ยงตรงตามโครงสร้าง (Construct Validity) หมายถึงคุณสมบัติของแบบทดสอบที่สามารถวัดสมรรถภาพของสมองด้านต่าง ๆ ได้

3. ความเป็นปรนัย (Objectivity) เป็นคุณสมบัติของแบบทดสอบ 3 ประการ คือ

3.1 อ่านแล้วเข้าใจตรงกัน

3.2 การตรวจให้คะแนนตรงกัน

3.3 การแปลความหมายของคะแนนตรงกัน

4. ความยาก (Difficulty) หมายถึงสัดส่วนของจำนวนผู้ที่ทำข้อสอบถูกต้องกับจำนวนผู้เข้าสอบทั้งหมด ความยากมีค่าตั้งแต่ 0 – 1 ใช้สัญลักษณ์  $p$  แทนความยาก โดยมีความหมายดังนี้ ถ้า  $p < 0.80$  ข้อสอบง่ายมาก

5. อำนาจจำแนก (discrimination) เป็นประสิทธิภาพของข้อสอบในการจำแนกเด็กเก่งออกจาก เด็กอ่อน อำนาจจำแนกมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง +1 ใช้สัญลักษณ์  $r$  แทนอำนาจจำแนก โดยมีความหมายดังนี้ ถ้า  $r < 0.60$  ข้อสอบมีอำนาจจำแนกดีมาก

คุณสมบัติที่ดีของตัวเลือก

1. ค่าความยากง่ายมีค่าอยู่ระหว่าง 0.20 – 0.80

2. ค่าอำนาจจำแนกมีค่าเป็นบวก ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป

คุณสมบัติที่ดีของตัวลวง

1. ต้องมีผู้เลือกตอบไม่น้อยกว่าร้อยละ 5 และควรเลือกตอบน้อยกว่าตัวเลือก
2. ค่าอำนาจจำแนกต้องมีค่าเป็นลบ

สรุปแนวทางการตรวจข้อสอบและแก้ไขปรับปรุงข้อสอบ

1. ความสอดคล้อง (Conformity) : Item Spec. หลักสูตร การเรียนการสอน
2. ความชัดเจน (Communicability) : สถานการณ์ คำถาม ตัวเลือก
3. ความเหมาะสม (Suitability) : ความยากง่ายของสถานการณ์ ความยากง่ายของคำถาม ทักษะ/กระบวนการคิด ความเป็นกลาง/ไม่ลำเอียง
4. ความถูกต้องแม่นยำ (Accuracy) : เฉลยถูกต้อง คำตอบถูกต้องเพียงข้อเดียว

### ความหมายแบบฝึกทักษะ

จากการศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับแบบฝึกทักษะพบว่า แบบฝึกทักษะจะหมายถึงนวัตกรรมหรือจัดเป็นสื่อการสอนชนิดหนึ่ง ซึ่งสามารถนำมาเรียกได้หลายชื่อ ไม่ว่าจะเป็น แบบฝึก แบบฝึกทักษะ แบบฝึกเสริมทักษะ หรือ แบบฝึกหัด ซึ่งมีนักวิชาการได้ให้ความหมายของแบบฝึกทักษะไว้ดังนี้

สมศักดิ์ สินธุระเวชญ์ (2524 : 106) กล่าวว่าแบบฝึกคือการจัดประสบการณ์ที่เน้นการฝึกหัดเพื่อให้เกิดความจำจนกระทั่งสามารถปฏิบัติได้โดยอัตโนมัติ ขั้นตอนในการสอนมักจะเริ่มด้วยการบอกหรือทำให้ดูเป็นตัวอย่าง แล้วให้ผู้เรียนทำตามหรือฝึกหัดเรื่อยไป จนกระทั่งจำและทำได้โดยอัตโนมัติ

ไพบุลย์ มุลดี (2546 : 48) ให้ความหมายของแบบฝึกทักษะว่า แบบฝึกทักษะ เป็นชุดการเรียนรู้ที่ครูจัดทำขึ้น ให้ผู้เรียนได้ทบทวนเนื้อหาที่เรียนรู้อย่างแล้วเพื่อสร้างความรู้ ความเข้าใจจะช่วยให้เพิ่มทักษะความชำนาญ และช่วยฝึกทักษะการคิดให้มากขึ้น ทั้งยังมี ประโยชน์ในการลดภาระให้กับครู อีกทั้งพัฒนาความสามารถของ ผู้เรียนทำให้ผู้เรียนมองเห็น ความก้าวหน้าจากผลการเรียนรู้ของตนเองได้

ฐานิยา อมรพลัง (2548 : 75) ได้สรุปถึงความหมายของแบบฝึกทักษะ คือ งาน กิจกรรมหรือประสบการณ์ที่ครูจัดให้นักเรียนได้ฝึกหัดกระทำ เพื่อทบทวนฝึกฝนเนื้อหาความรู้ต่าง ๆ ที่ได้ เรียนไปแล้วให้เกิดความจำ จนสามารถปฏิบัติได้ด้วย ความชำนาญ และให้ผู้เรียนสามารถนำไปใช้ใน ชีวิตประจำวันได้

สุวิทย์ มุลคำ และสุนันทา สุนทรประเสริฐ (2550 : 53) ได้สรุปความสำคัญของแบบฝึกทักษะว่าแบบฝึกทักษะมีความสำคัญต่อผู้เรียนไม่น้อย ในการที่จะช่วยส่งเสริมสร้างทักษะให้กับผู้เรียนได้เกิดการเรียนรู้และเข้าใจได้เร็วขึ้น ชัดเจนขึ้น กว้างขวางขึ้นทำให้การสอนของครูและการเรียนของนักเรียนประสบผลสำเร็จอย่างมีประสิทธิภาพ

อกนิษฐ์ กรไกร (2549 : 18) ได้สรุปความหมายของแบบฝึกทักษะไว้ว่า แบบฝึกทักษะ หมายถึง สื่อที่สร้างขึ้นเพื่อเสริมสร้างทักษะให้แก่ นักเรียน มีลักษณะเป็นแบบฝึกหัดที่มีกิจกรรมให้นักเรียนทำโดย มีการทบทวนสิ่งที่เรียนผ่านมาแล้วจากบทเรียน ให้เกิดความเข้าใจและเป็นการฝึกทักษะ และแก้ไขในจุดบกพร่องเพื่อให้นักเรียนได้มีความสามารถและศักยภาพยิ่งขึ้นเข้าใจบทเรียนดีขึ้น

ถวัลย์ มาศจรัส และมณี เรืองขำ (2549 : 18) ได้ให้ความหมายของแบบฝึกหัดไว้ว่า แบบฝึกหัดเป็นกิจพัฒนาทักษะการเรียนรู้ที่ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม มีความหลากหลาย และปริมาณเพียงพอที่สามารถตรวจสอบและพัฒนาทักษะกระบวนการคิด กระบวนการเรียนรู้สามารถนำผู้เรียนสู่การสรุป ความคิดรวบยอดและหลักการสำคัญของสาระการเรียนรู้ รวมทั้งทำให้ผู้เรียนสามารถตรวจสอบความเข้าใจในบทเรียนด้วยตนเองได้

กตिका สุวรรณสมพงศ์ (2541 : 40) ได้ให้ความหมายของแบบฝึกหัดว่า หมายถึง การจัดประสบการณ์การฝึกหัด โดยใช้วัสดุ ประกอบการสอน หรือเป็นกิจกรรมให้ผู้เรียนกระทำด้วย ตนเอง เพื่อฝึกฝนเนื้อหาต่าง ๆ ที่ได้เรียนไปแล้วให้เข้าใจดีขึ้น และเกิดความชำนาญจนสามารถนำไปใช้ได้โดยอัตโนมัติ ทั้งในการแก้ปัญหาระหว่างเรียนและในสถานการณ์อื่น ๆ ใน ชีวิตประจำวัน

วรรณภา ไชยวรรณ (2549 : 40) ได้สรุปความหมายและความสำคัญของแบบฝึกได้ ว่า แบบฝึก คือ แบบฝึกหัด หรือชุดฝึกที่ครูจัดให้นักเรียน เพื่อให้มีทักษะเพิ่มขึ้นหลังจากที่ได้เรียนรู้เรื่อง นั้น ๆ มาบ้างแล้ว โดยแบบฝึกต้องมีทิศทางตรงตามจุดประสงค์ ประกอบกิจกรรมที่น่าสนใจและ สนุกสนาน

### ลักษณะของแบบฝึกทักษะที่ดี

เนื่องจากแบบฝึกทักษะจะเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการเสริมทักษะให้แก่ผู้เรียน ดังนั้น การที่จะสร้างแบบฝึกทักษะให้มีประสิทธิภาพ จะต้องมาจากการศึกษาองค์ประกอบและลักษณะที่ดีของแบบฝึกทักษะ เพื่อให้สามารถนำไปใช้ให้เหมาะสมกับระดับความรู้ความสามารถของผู้เรียน เนื้อหา หรือลักษณะของวิชา โดยลักษณะของแบบฝึกที่ดีจะมีรายละเอียดดังนี้

สุพรรณิ ไชยเทพ (2544 : 19) ได้กล่าวถึงลักษณะของแบบฝึกที่ดีไว้ดังนี้

1. ต้องมีความชัดเจน ทั้งคำชี้แจง คำสั่ง ง่ายต่อการเข้าใจ
2. ตรงกับจุดประสงค์ที่ต้องการวัด
3. มีภาษาและรูปภาพที่ดึงดูดความสนใจของนักเรียนและเหมาะสมกับวัยของผู้เรียน
4. แบบฝึกแต่ละเรื่องไม่ควรยาวมากจนเกินไป
5. ควรมีกิจกรรมหลากหลายรูปแบบทำให้นักเรียนไม่เบื่อ
6. ควรตอบสนองความต้องการและความสนใจของผู้เรียน สร้างความสนุกสนานเพลิดเพลินขณะทำแบบฝึก
7. มีคำตอบที่ชัดเจน
8. แบบฝึกที่ดีสามารถประเมินความก้าวหน้า และความรู้ของนักเรียนได้



กฤษฎา แสงเดช (2545 : 6-7) ได้กล่าวแนะนำผู้สร้างแบบฝึกให้ยึดลักษณะแบบฝึกที่ดีดังนี้

1. แบบฝึกที่ดีควรความชัดเจนทั้งคำสั่งและวิธีทำ คำสั่งหรือตัวอย่างแสดงวิธีทำที่ใช้ไม่ควรยากเกินไป เพราะจะทำให้ความเข้าใจยาก ควรปรับให้ง่ายและเหมาะสมกับผู้ใช้ เพื่อ นักเรียนสามารถเรียนด้วยตนเองได้
2. แบบฝึกที่ดีควรมีความหมายต่อผู้เรียนและตรงตามจุดหมายของการฝึก ลงทุนน้อย ใช้ได้นาน ทนสมัย
3. ภาษาและภาพที่ใช้ในแบบฝึกเหมาะสมกับวัยและพื้นฐานความรู้ของผู้เรียน
4. แบบฝึกที่ดีควรแยกฝึกเป็นเรื่อง ๆ แต่ละเรื่องไม่ควรยาวเกินไป แต่ควรมีกิจกรรมหลายแบบ เพื่อสร้างความสนใจ และไม่เบื่อในการทำและฝึกทักษะใดทักษะหนึ่งจนชำนาญ
5. แบบฝึกที่ดีควรมีทั้งแบบกำหนดคำตอบในแบบและให้ตอบโดยเสรี การเลือกใช้คำ ข้อ ความรูปภาพในแบบฝึกควรเป็นสิ่งที่นักเรียนคุ้นเคยและตรงกับความสนใจของนักเรียน ก่อให้เกิดความเพลิดเพลินและพอใจแก่ผู้ใช้ ซึ่งตรงกับหลักการเรียนรู้ว่า นักเรียนจะเรียนได้เร็ว ในการกระทำที่ก่อให้เกิดความพึงพอใจ
6. แบบฝึกที่ดีควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ศึกษาด้วยตนเอง ให้รู้จักค้นคว้ารวบรวมสิ่งที่พบเห็นบ่อย ๆ หรือที่ตัวเองเคยใช้ จะทำให้ผู้เรียนเข้าใจเรื่องนั้น ๆ มากยิ่งขึ้น และรู้จักนำความรู้ไปใช้ใน ชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง มีหลักเกณฑ์และมองเห็นว่าสิ่งที่ได้ฝึกนั้นมีความหมายต่อเขาตลอดไป
7. แบบฝึกที่ดีควรตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคล ผู้เรียนแต่ละคนมีความแตกต่างกัน ในหลาย ๆ ด้าน เช่น ความต้องการ ความสนใจ ความพร้อม ระดับสติปัญญา และประสบการณ์ เป็นต้น ฉะนั้น การทำแบบฝึกแต่ละเรื่องควรจัดทำให้มากพอและมีทุกระดับตั้งแต่ ง่าย ปานกลาง จนถึงระดับค่อนข้างยาก เพื่อว่าทั้งนักเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน จะได้เลือกทำได้ตามความสามารถ ทั้งนี้เพื่อให้ นักเรียนทุกคนได้ประสบความสำเร็จในการทำแบบฝึก
8. แบบฝึกที่จัดทำเป็นรูปเล่ม นักเรียนสามารถเก็บรักษาไว้เป็นแนวทางเพื่อทบทวนด้วยตนเองต่อไป
9. การที่นักเรียนได้ทำแบบฝึก ช่วยให้ครูมองเห็นจุดเด่นหรือปัญหาต่าง ๆ ของนักเรียนได้ชัดเจน ซึ่งจะช่วยให้ครูดำเนินการปรับปรุงแก้ไขปัญหานั้น ๆ ได้ทัน่วงที
10. แบบฝึกที่จัดขึ้น นอกจากมีในหนังสือเรียนแล้ว จะช่วยให้ นักเรียนได้ฝึกฝนอย่างเต็มที่
11. แบบฝึกที่จัดพิมพ์ไว้เรียบร้อยแล้ว จะช่วยให้ครูประหยัดแรงงานและเวลาในการที่จะต้องเตรียมแบบฝึกอยู่เสมอ ในด้านผู้เรียนไม่ต้องเสียเวลาในการลอกแบบฝึกจากตำราเรียนหรือกระดานดำ ทำให้มีเวลาและโอกาสได้ฝึกฝนทักษะต่าง ๆ ได้มากขึ้น
12. แบบฝึกช่วยประหยัดค่าใช้จ่ายเพราะการพิมพ์เป็นรูปเล่มที่แน่นอน ลงทุนต่ำ แทนที่จะใช้พิมพ์ลงกระดาษไขทุกครั้งไป นอกจากนี้ยังมีประโยชน์ในการที่ผู้เรียนสามารถบันทึกและมองเห็นความก้าวหน้าของตนได้อย่างมีระบบและมีระเบียบ

วรสุดา บุญยไวโรจน์ (2536 : 37) กล่าวแนะนำให้ผู้สร้างแบบฝึกได้ยึดลักษณะของแบบฝึกที่ดีไว้ดังนี้

1. แบบฝึกควรมีความชัดเจนทั้งคำสั่งและวิธีทำ คำสั่งหรือตัวอย่าง แสดงวิธีทำที่ใช้ไม่ควรยาวเกินไป เพราะจะทำให้เข้าใจยาก ควรปรับให้ง่ายเหมาะสมกับผู้ใช้ ทั้งนี้เพื่อให้ นักเรียนสามารถศึกษาด้วยตนเองได้ถ้าต้องการ

2. แบบฝึกที่ดีต้องมีความหมายต่อผู้เรียน และตรงตามจุดมุ่งหมายของการฝึก ลงทุนน้อย ใช้ได้นาน ๆ และทันสมัยอยู่เสมอ

3. ภาษาและภาพที่ใช้ในแบบฝึก ควรเหมาะสมกับวัยและพื้นฐานความรู้ของ ผู้เรียน

4. แบบฝึกที่ดีควรแยกฝึกเป็นเรื่อง ๆ แต่ละเรื่องไม่ควรยาวเกินไปแต่ควรมีกิจกรรมหลายรูปแบบ เพื่อเข้าใจให้นักเรียนเกิดความสนใจและไม่เบื่อหน่ายในการทำ และเพื่อฝึกทักษะใดทักษะหนึ่งจนเกิดความชำนาญ

5. แบบฝึกที่ดีควรมีทั้งแบบกำหนดคำตอบได้ แบบให้ตอบโดยเสรี การเลือกใช้คำ ข้อความหรือรูปภาพในแบบฝึกหัดควรเป็นสิ่งที่นักเรียนคุ้นเคยและตรงกับความในใจของนักเรียน เพื่อว่าแบบฝึกที่สร้างขึ้นจะได้ก่อให้เกิดความเพลิดเพลินและพอใจแก่ผู้ใช้ ซึ่งตรงกับหลักการ เรียนรู้ที่ว่า เด็กมักจะเรียนรู้ได้เร็วในการกระทำที่ก่อให้เกิดความพึงพอใจ

6. แบบฝึกที่ดีควรเปิดโอกาสให้รู้จักค้นคว้า รวบรวมสิ่งที่พบเห็นบ่อย ๆ หรือที่ตัวเองเคยใช้ จะทำให้นักเรียนเข้าใจเรื่องนั้น ๆ มากยิ่งขึ้น และรู้จักนำความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง มีหลักเกณฑ์และมองเห็นว่าสิ่งที่เขาได้ฝึกฝนนั้นมีความหมายต่อเขาตลอดไป

7. แบบฝึกที่ดีควรตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคลผู้เรียนแต่ละคนมี ความสามารถแตกต่างกันในหลาย ๆ ด้าน เช่น ความต้องการ ความสนใจ ความพร้อม ระดับสติปัญญาและประสบการณ์ ฯลฯ ฉะนั้นการทำแบบฝึกหัดแต่ละเรื่องควรจัดทำให้มากพอและมีทุกระดับ ตั้งแต่ง่ายปานกลาง จนถึงระดับค่อนข้างยาก เพื่อว่าทั้งเด็กเก่ง กลาง และอ่อน จะได้ เลือกทำได้ตามความสามารถ ทั้งนี้เพื่อให้เด็กทุกคนประสบผลสำเร็จในการทำแบบฝึก

8. แบบฝึกที่ดีควรสามารถสร้างความสนใจของนักเรียนได้ตั้งแต่หน้าปกไปจนถึงหน้าสุดท้าย

9. แบบฝึกที่ดีควรได้รับการปรับปรุงควบคู่ไปกับหนังสือแบบเรียนอยู่เสมอ และ ควรใช้ได้ดีทั้งในและนอกห้องเรียน

10. แบบฝึกหัดที่ดีควรเป็นแบบฝึกที่สามารถประเมินและจำแนกความเจริญของ งามของเด็กได้ด้วย

สำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ (2540 : 147) ยังได้กล่าวถึงลักษณะของแบบฝึกทักษะที่ดีไว้ด้วยเช่นกันคือ แบบฝึกทักษะควรเกี่ยวข้องกับเรื่องที่เรียนมาแล้ว เหมาะสมกับระดับ วัยหรือความสามารถของนักเรียน มีคำชี้แจงสั้น ๆ ที่ช่วยให้นักเรียนเข้าใจวิธีทำได้ง่าย ใช้เวลาที่เหมาะสม มีสิ่งที่น่าสนใจและท้าทายให้แสดงความสามารถ มีข้อแนะนำในการใช้ มีให้เลือกทั้งแบบตอบอย่างจำกัดและตอบอย่างเสรี ถ้าเป็นแบบฝึกที่ต้องการให้ผู้ทำศึกษาด้วยตนเอง แบบฝึกนั้นควรมี

หลายรูปแบบและให้ความหมายแก่ผู้ฝึกทำด้วย ควรใช้ภาษา สำนวนง่าย ๆ ฝึกให้คิดให้เร็วและสนุก รวมทั้งแบบฝึกควรปลูกความสนใจและใช้หลักจิตวิทยาไปด้วย

ดังนั้น ลักษณะของแบบฝึกหัดที่ดี คือต้องมีจุดประสงค์และคำสั่งที่ชัดเจน ทำให้ผู้เรียนทำความเข้าใจได้ง่าย มีความครอบคลุมและสอดคล้องกับเนื้อหา มีลักษณะของปัญหาเกี่ยวข้องกับสิ่งที่เรียนมาแล้ว และสามารถนำสิ่งที่เรียนมาแล้วเข้าใช้ในการแก้ปัญหาในแบบฝึกทักษะได้ ต้องชักชวนให้ผู้เรียนเกิดความสนใจที่จะลงมือทำแบบฝึกหัดต่อไป เพื่อให้เกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ และควรคำนึงไว้เสมอว่าต้องเป็นแบบฝึกที่ผู้เรียนสามารถนำไปใช้งานหรือศึกษาได้ด้วยตนเอง รูปแบบที่น่าสนใจ และนำเทคโนโลยีสมัยใหม่มาใช้ในการเพิ่มความน่าสนใจของแบบฝึกทักษะ

### เทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

เทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ หรือเทคโนโลยีสื่อเสมือนจริง หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า เทคโนโลยีสื่อโลกเสมือนผสานโลกแห่งความจริง เป็นเทคโนโลยีที่ถูกนำมาใช้ในการพัฒนางานหลาย ๆ ด้าน ซึ่งที่เด่นชัดประการหนึ่งคือการนำเทคโนโลยีชนิดนี้มาใช้ในการปรับปรุงรูปแบบและพัฒนาให้เกิดประสบการณ์การเรียนรู้ใหม่ ๆ เป็นการส่งเสริมให้การเรียนการสอน หรือสื่อที่ใช้ในการเรียนการสอนประสบผลสัมฤทธิ์เมื่อเทียบกับการเรียนการสอนหรือสื่อที่ไม่ได้นำเทคโนโลยีชนิดนี้เข้ามาใช้ เนื่องจากเทคโนโลยีสื่อเสมือนจริงจัดเป็นลักษณะของสื่อที่เปลี่ยนรูปแบบความรู้แบบนามธรรมให้เป็นความรู้แบบรูปธรรมที่เกิดจากการปฏิสัมพันธ์กับสื่อโดยตรง โดยมีนักวิชาการได้กล่าวถึงความหมายของเทคโนโลยีข้างต้นไว้ ดังนี้

วิศัลย์ ประสงค์สุข (2555) กล่าวว่า Augmented Reality จะประกอบด้วย 3 องค์ประกอบด้วยกันคือ

1. Combines Real and Virtual (ผสมผสานกันระหว่างภาพจำลอง และภาพจริง)
2. Interactive in real Times (ตอบสนองได้ทันที)
3. Registered in 3D (แสดงผลเป็นสามมิติ)

Augmented Reality สามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทตามลักษณะการใช้งาน คือ

1. ประเภทที่อยู่บนอุปกรณ์พกพา ดังจะเห็นอยู่ใน Application ที่มีอยู่ในตลาดทั้งบนระบบปฏิบัติการ iOS และ Android หรืออื่น ๆ ตัวอย่างเช่น Application ที่ใช้ค้นหาสถานที่ด้วยการเปิดกล้อง และหมุนตัวไปในทิศทางต่าง ๆ ตามสถานที่ที่ต้องการ

2. ประเภทที่ใช้งานกับคอมพิวเตอร์ ซึ่งจะใช้กล้องเว็บแคมในการอ่านสัญลักษณ์ เพื่อนำเข้าไปประมวลผลและแสดงผลภาพกราฟิกผ่านทางหน้าจอ โดยเฉพาะประเภทที่ 1 นี้กำลังเป็นที่นิยมเมื่อสมาร์ตโฟนรุ่นต่าง ๆ มีความสามารถที่เอื้อเฟื้อกับ Augmented Reality ไม่ว่าจะเป็นแบบมี GPS เอาไว้ระบุตำแหน่งของผู้ใช้ มี Gyroscope ไว้สำหรับอ่านทิศทางเคลื่อนที่ของโทรศัพท์ มีอินเทอร์เน็ตที่โปรแกรมจะสามารถดึงข้อมูลที่อยู่ในรัศมีที่กำหนดมาแสดงได้ และมีกล้องถ่ายภาพเอาไว้แสดงภาพของสถานที่จริง ซึ่งจะถูกซ้อนด้วยข้อมูลที่โปรแกรมที่ดึงมาจากอินเทอร์เน็ต

ในยุคปัจจุบัน Augmented Reality มีประโยชน์มากมายหลายด้าน ซึ่งสามารถยกตัวอย่างได้ดังต่อไปนี้

1. ใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษา
2. ใช้ในการซ่อมบำรุงอุปกรณ์ต่าง ๆ โดยผู้ปฏิบัติจะสวมแว่นตาและหูฟัง เพื่อฟังขั้นตอนการถอดชิ้นส่วนพร้อมมีภาพกราฟฟิกประกอบ
3. ใช้ในการหาเสียง เล่นผู้สนับสนุนนายบารัค โอบามา ในการชิงตำแหน่งประธานาธิบดี ในปี 2012 ที่ผ่านมา
4. ใช้ในการเล่นเกมส์ ผู้เล่นจะมีแผ่นกระดานสัญลักษณ์ เพื่อให้เครื่องเล่นเกมส์อ่านและประมวลผลออกมาเป็นภาพกราฟฟิก
5. ใช้ในการขายสินค้า เช่น นาฬิกาข้อมือหนึ่งใช้ Augmented Reality เพื่อให้ลูกค้าจำลองการสวมนาฬิกาข้อมือ ซึ่งทำให้ลูกค้าสามารถตัดสินใจเลือกแบบที่ตัวเองชอบได้ง่ายขึ้น
6. ใช้ในการค้นหาสถานที่

พินดา ตันศิริ (2553 : 169-170) เทคโนโลยีสื่อเสมือนจริงเป็นนวัตกรรมหรือเทคโนโลยีที่มีมาตั้งแต่ปี ค.ศ. 2004 จัดเป็นแขนงหนึ่งของงานวิจัยด้านวิทยาการคอมพิวเตอร์ด้วยเทคนิคทางด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกในการผนวกเทคโนโลยีความจริงเสมือนเข้ากับเทคโนโลยีภาพผ่านซอฟต์แวร์และอุปกรณ์เชื่อมต่อต่าง ๆ เช่น เว็บแคม คอมพิวเตอร์และแสดงผลผ่านหน้าจอ คอมพิวเตอร์หรือหน้าจอโทรศัพท์มือถือในรูปแบบภาพนิ่ง ภาพเคลื่อนไหว หรืออาจจะเป็นสื่อที่มีเสียงประกอบ ทำให้เกิดปฏิสัมพันธ์ระหว่างสื่อกับผู้ใช้งานได้ทันทีในมุมมอง 360 องศา ซึ่งเป็นการแสดงผลแบบ Real Time แนวคิดในการประดิษฐ์เทคโนโลยีสื่อเสมือนจริงเกิดขึ้นโดย Thomas Caudeville ซึ่งเทคโนโลยีสื่อเสมือนจริงสามารถนำไปประยุกต์ใช้ใน ด้านต่าง ๆ อาทิเช่น ด้านอุตสาหกรรม ด้านการแพทย์ด้านธุรกิจด้านการโฆษณาด้านการท่องเที่ยวรวมถึงด้านการศึกษา

วิวัฒน์ มีสุวรรณ (2554 : 52) ได้กล่าวถึงเทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ไว้ว่าเทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ สามารถใช้ จัดการเรียนรู้ เพื่อให้ผู้เรียนได้รับมีประสบการณ์มีความหมายลึกซึ้งมากขึ้นโดยการเชื่อมโยงเนื้อหา ที่ได้เรียนรู้กับสถานที่หรือวัตถุที่เฉพาะเจาะจง สอดคล้องกับเนื้อหาที่เรียนรู้ด้วยภาพสามมิติ โดยการผนวกเข้ากับการเรียนรู้แบบสำรวจด้วย เทคโนโลยีมือถือและอุปกรณ์สมัยใหม่ ที่ทำให้ การเรียนสามารถจะกว้างขวางมากยิ่งขึ้น หรือ เปลี่ยนแปลงให้เกิดการเรียนรู้สู่ภายนอกห้องเรียน มากขึ้น และในบางกรณีเทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ สามารถผนวกเข้ากับรูปแบบการเรียนรู้ อื่น ๆ เข้าไป เช่น การนำมาใช้กับเกมการศึกษา นำมาใช้กับกิจกรรมส่งเสริมการทำงานเป็นทีม และนำมาใช้การเรียนรู้แบบทำทนาย เป็นต้น

พจน์ศิริพันธ์ ลิ้มปิ่นนันทน์ (2560) ได้กล่าวถึง เทคโนโลยีสื่อเสมือนจริง (Augmented Reality: AR) เป็นประเภทหนึ่งของเทคโนโลยีความจริงเสมือน (Virtual Reality Technology: VR) ซึ่ง VR เป็นวิวัฒนาการของเทคโนโลยีที่เริ่มจากการวิจัยและพัฒนา เทคโนโลยีสำหรับการทหารและจำลองการบินของประเทศสหรัฐอเมริกา ระหว่างปี ค.ศ. 1960-1969 ปัจจุบัน เทคโนโลยีความจริง

เสมือนได้มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง และได้นำมาประยุกต์ใช้กับงานด้านต่าง ๆ อาทิ ด้าน วิศวกรรม  
ด้านวิทยาศาสตร์การแพทย์ด้านบันเทิง เป็นต้น และมีการแบ่งประเภทของระบบความจริงเสมือน  
ตาม พื้นฐานวิธีที่ติดต่อกับผู้ใช้ ดังนี้

1. Desktop VR หรือ Window on World Systems (WoW) เป็นระบบความจริงเสมือนที่ใช้จอภาพ ของคอมพิวเตอร์ในการแสดงผล

2. Video Mapping เป็นการนำวิดีโอมาเป็นอุปกรณ์หรือเครื่องมือนำเข้าข้อมูลของผู้ใช้ และใช้กราฟิก คอมพิวเตอร์นำเสนอการแสดงผลในโมเดลแบบสองมิติหรือสามมิติ โดยผู้ใช้จะเห็นตัวเอง และเปลี่ยนแปลงตัวเองจากจอภาพ

3. Immersive Systems เป็นระบบความจริงเสมือนสำหรับผู้ใช้ส่วนบุคคล โดยผู้ใช้นำอุปกรณ์ ประเภทจอภาพสวมศีรษะ (Head-Mounted Display หรือ HMD) ได้แก่ หมวกเหล็กหรือ หน้ากากมาใช้จำลองภาพและการได้ยิน

4. Telepresence เป็นระบบเสมือนจริงที่มีการนำอุปกรณ์ตรวจจับสัญญาณระยะไกลที่อาจ ติดตั้งกับ หุ่นยนต์เชื่อมต่อการใช้งานกับผู้ใช้

5. Augmented / Mixed Reality Systems เป็นการผสมผสานระหว่าง Telepresence ระบบ เทคโนโลยีความเป็นจริงเสริมและเทคโนโลยีภาพเพื่อสร้างสิ่งที่เสมือนจริงให้กับผู้ใช้ เทคโนโลยี ความเป็นจริงเสริม (Augmented Reality) มีหลักการทำงาน ประกอบด้วย 3 กระบวนการ คือ

5.1. การวิเคราะห์ภาพ (Image Analysis) เป็นขั้นตอนการค้นหา Marker จากภาพ ที่ได้จากกล้องแล้ว สืบค้นจากฐานข้อมูล (Marker Database) ที่มีการเก็บข้อมูลขนาดและ รูปแบบของ Marker โดย Marker แบ่งออก เป็น 3 ประเภท คือ

1. Marker-based AR การใช้ Marker กำหนดบริเวณที่จะแสดงโมเดล
2. Location-based คือ Marker ระบบพิกัดดาวเทียมกำหนดบริเวณที่จะแสดง โมเดล
3. Marker less คือการใช้วัตถุกำหนดบริเวณที่จะแสดงโมเดล

5.2. การคำนวณค่าตำแหน่งเชิง 3 มิติ (Pose Estimation) ของ Marker เพื่อนำมา วิเคราะห์รูปแบบของ Marker เทียบกับกล้อง

5.3. กระบวนการสร้างภาพ 2 มิติ จากโมเดล 3 มิติ (3D Rendering) เป็นการเพิ่ม ข้อมูลเข้าไปในภาพ โดยใช้ค่าตำแหน่งเชิง 3 มิติ ที่คำนวณได้จนได้ภาพเสมือนจริง

กล่าวโดยสรุปคือเทคโนโลยี ออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เป็นเทคโนโลยีที่มีคุณประโยชน์อย่าง กว้างขวาง ทั้งนี้ในด้านการเรียนการสอน ได้มีการนำมาประยุกต์ใช้ในห้องเรียน เพื่อสร้างบรรยากาศ ในการเรียนให้น่าตื่นเต้น และแปลกใหม่ ทำให้ผู้เรียนเกิดการสนใจเรียนรู้ และสามารถพัฒนา ศักยภาพในการเรียนให้ดียิ่งขึ้นไป ทั้งยังเป็นการพัฒนารูปแบบการเรียน ทำให้การเรียนการสอนมี ประสิทธิภาพ โดยจะช่วยให้ผู้เรียนได้มองเห็นภาพใกล้เคียงกับความเป็นจริง รวมทั้งนักศึกษา

สามารถทำการศึกษาด้วยตนเอง โดยไม่จำกัดเวลา สถานที่ และยังสามารถทบทวนซ้ำได้ตลอดเวลาที่ต้องการ

### การทดสอบประสิทธิภาพ นวัตกรรม สื่อการเรียนการสอน

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ (2520 : 135 - 143) ได้ให้ แนวคิดและหลักปฏิบัติไว้ว่า เมื่อได้ผลิตสื่อหรือชุดการสอนแล้ว ก่อนนำไปใช้จะต้องนำสื่อหรือชุดการสอนที่ผลิตขึ้นไปทดสอบประสิทธิภาพเพื่อดูว่า สื่อหรือชุดการสอน ทำให้ผู้เรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นหรือไม่ มีประสิทธิภาพในการช่วยให้กระบวนการเรียน การสอนดำเนินไปอย่างมีประสิทธิภาพเพียงใด มีความสัมพันธ์กับผลลัพธ์หรือไม่ และผู้เรียนมีความพึงพอใจต่อการเรียนจากสื่อหรือสื่อหรือชุดการสอนในระดับใด ดังนั้นผู้ผลิตสื่อการสอนจำเป็นจะต้องนำสื่อหรือชุดการสอนไปหาคุณภาพ เรียกว่า การทดสอบประสิทธิภาพ กล่าวคือ การทดสอบประสิทธิภาพของสื่อหรือชุดการสอน หมายถึงการหาคุณภาพของสื่อหรือชุดการสอน โดยพิจารณาตาม ขั้นตอนของการพัฒนาสื่อหรือชุดการสอนแต่ละขั้น ตรงกับภาษาอังกฤษว่า “Developmental Testing”

Developmental Testing คือ การทดสอบคุณภาพตามพัฒนาการของการผลิตสื่อหรือชุดการสอนตามลำดับขั้นเพื่อตรวจสอบคุณภาพของแต่ละองค์ประกอบของต้นแบบชิ้นงาน ให้ดำเนินไปอย่างมีประสิทธิภาพ

ความจำเป็นที่จะต้องหาประสิทธิภาพ

การทดสอบประสิทธิภาพของสื่อหรือชุดการสอนมีความจำเป็นด้วย เหตุผล 3 ประการคือ

#### 1. สำหรับหน่วยงานผลิตสื่อหรือชุดการสอน

การทดสอบ ประสิทธิภาพช่วยประกันคุณภาพของสื่อหรือชุดการสอนว่าอยู่ในขั้นสูงเหมาะสมที่ จะลงทุนผลิตออกมาเป็นจำนวนมาก หากไม่มีการทดสอบประสิทธิภาพเสียก่อน แล้วเมื่อผลิตออกมาใช้ประโยชน์ไม่ได้ดี ก็จะต้องผลิตหรือทำขึ้นใหม่เป็นการ ลิ้นเปลืองทั้งเวลา แรงงาน และเงินทอง

#### 2. สำหรับผู้ใช้สื่อหรือชุดการสอน

สื่อหรือชุดการสอนที่ผ่านการ ทดสอบประสิทธิภาพจะทำหน้าที่เป็นเครื่องมือช่วยสอนได้ดี ในการสร้างสภาพการเรียนรู้ให้ผู้เรียน ได้เปลี่ยนแปลงพฤติกรรมตามที่มุ่งหวัง บางครั้งชุดการสอนต้องช่วย ครูสอน บางครั้งต้องสอนแทนครู (อาทิ ในโรงเรียนครูคนเดียว) ดังนั้น ก่อนนำสื่อ หรือชุดการสอนไปใช้ ครูจึงควรมั่นใจว่า ชุดการสอนนั้นมีประสิทธิภาพในการช่วยให้ นักเรียนเกิดการเรียนจริง การทดสอบประสิทธิภาพตามลำดับขั้นจะช่วยให้เราได้สื่อ หรือชุดการสอนที่มีคุณค่าทางการสอนจริงตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้

#### 3. สำหรับผู้ผลิตสื่อหรือชุดการสอน

การทดสอบประสิทธิภาพจะทำให้ผู้ผลิตมั่นใจได้ว่าเนื้อหาสาระที่บรรจุลงในสื่อหรือชุดการสอนมีความเหมาะสม ง่ายต่อการเข้าใจ อันจะช่วยให้ผู้ผลิตมีความชำนาญสูงขึ้น เป็นการประหยัด แรงสมอง แรงงาน เวลาและเงินทองในการเตรียมต้นแบบ

การกำหนดประสิทธิภาพ

1. ความหมายของเกณฑ์ (Criterion) เกณฑ์เป็นขีดกำหนดที่จะ ยอมรับว่าสิ่งใด หรือ พฤติกรรมใดมีคุณภาพและหรือปริมาณที่จะรับได้

การตั้งเกณฑ์ ต้องตั้งไว้ครั้งแรกครั้งเดียว เพื่อจะปรับปรุงคุณภาพให้ถึง เกณฑ์ขั้นต่ำที่ตั้งไว้ จะตั้งเกณฑ์การทดสอบประสิทธิภาพไว้ต่างกันไม่ได้ เช่น เมื่อทำการทดสอบประสิทธิภาพแบบเดี่ยว ตั้งเกณฑ์ไว้ 60/60 แบบกลุ่ม ตั้งไว้ 70/70 ส่วนแบบสนาม ตั้งไว้ 80/80 ถือว่าเป็นการตั้งเกณฑ์ที่ไม่ถูกต้อง อนึ่ง เนื่องจากเกณฑ์ที่ตั้งไว้เป็นเกณฑ์ต่ำสุด ดังนั้น หากต้องการ ทดสอบคุณภาพของสิ่งใด หรือพฤติกรรมใดได้ผลสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้มีนัยสำคัญที่ ระดับ .05 หรืออนุโลมให้มีความคลาดเคลื่อน ต่ำ หรือสูงกว่า ประสิทธิภาพที่ตั้งไว้ เกิน 2.5 ก็ให้ปรับเกณฑ์ขึ้นไปอีกชั้น แต่หากได้ค่าต่ำกว่า ประสิทธิภาพที่ตั้งไว้ ต้องปรับปรุงและนำไปทดสอบประสิทธิภาพใช้หลายครั้งในภาคสนาม จนได้ค่า ถึงเกณฑ์ ที่กำหนด

2. ความหมายของเกณฑ์ประสิทธิภาพ หมายถึง ระดับประสิทธิภาพ ของสื่อหรือชุดการสอน ที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม เป็นระดับ ที่ผู้ผลิตสื่อหรือชุดการสอนจะพึงพอใจ หากสื่อหรือชุดการสอนมีประสิทธิภาพถึงระดับนั้นแล้ว สื่อหรือชุดการสอนนั้นก็มีความค่าที่จะนำไป สอนนักเรียน และคุ้มค่าแก่การลงทุนผลิตออกมาเป็นจำนวนมาก การกำหนดเกณฑ์ประสิทธิภาพ กระทำได้ โดยการประเมินผลพฤติกรรมของผู้เรียนเป็น 2 ประเภทคือ พฤติกรรมต่อเนื่อง (กระบวนการ) กำหนดค่า ประสิทธิภาพเป็น  $E_1 = \text{Efficiency of Process}$  (ประสิทธิภาพของ กระบวนการ) และพฤติกรรมสุดท้าย (ผลลัพธ์) กำหนดค่าประสิทธิภาพเป็น  $E_2 = \text{Efficiency of Product}$  (ประสิทธิภาพของผลลัพธ์)

2.1 ประเมินพฤติกรรมต่อเนื่อง (Transitional Behavior) คือ ประสิทธิภาพต่อเนื่อง ซึ่ง ประกอบด้วยพฤติกรรมย่อยของผู้เรียน เรียกว่า “กระบวนการ” (Process) ที่เกิดจากการประกอบ กิจกรรมกลุ่ม ได้แก่ การทำ โครงการ หรือทำรายงานเป็นกลุ่มและรายงานบุคคล ได้แก่ งานที่ มอบหมาย และ กิจกรรมอื่นใดที่ผู้สอนกำหนดไว้

2.2 ประเมินพฤติกรรมสุดท้าย (Terminal Behavior) คือ ประเมินผลลัพธ์ (Product) ของผู้เรียน โดยพิจารณาจากการสอบหลังเรียนและการ สอบไล่ ประสิทธิภาพของสื่อหรือชุดการสอน จะกำหนดเป็นเกณฑ์ ที่ผู้สอน คาดหมายว่าผู้เรียนจะเปลี่ยนพฤติกรรมเป็นที่พึงพอใจ โดยกำหนด ให้ผลเฉลี่ย คะแนนการทำงานและการประกอบกิจกรรมของผู้เรียนทั้งหมด ต่อร้อยละของผลการ ประเมินหลังเรียนทั้งหมด นั่นคือ  $E_1/E_2 = \text{ประสิทธิภาพของกระบวนการ} / \text{ประสิทธิภาพของผลลัพธ์}$  ตัวอย่าง 80/80 หมายความว่า เมื่อเราเรียนจากสื่อหรือชุดการสอน แล้ว ผู้เรียนจะสามารถทำแบบ

ฝึกปฏิบัติ หรืองานได้ผลเฉลี่ย 80 % และประเมิน หลังเรียนและงานสุดท้ายได้ผลเฉลี่ย 80 % การที่จะกำหนดเกณฑ์  $E_1/E_2$  ให้มีค่าเท่าใดนั้น ให้ผู้สอนเป็นผู้พิจารณาตามความพอใจ

วิธีการคำนวณหาประสิทธิภาพ

วิธีการคำนวณหาประสิทธิภาพกระทำได้ 2 วิธี คือ โดยใช้สูตร และการคำนวณธรรมดา

ก. โดยใช้สูตร กระทำได้โดยใช้สูตรต่อไปนี้

$$\text{สูตรที่ 1} \quad E_1 = \frac{\sum x}{A} \times 100 \quad \text{หรือ} \quad \frac{\bar{x}}{A} \times 100$$

เมื่อ  $E_1$  คือ ประสิทธิภาพของกระบวนการ

$\sum x$  คือ คะแนนรวมของแบบฝึกปฏิบัติกิจกรรมหรืองาน ที่ทำระหว่างเรียนทั้งที่เป็นกิจกรรมในห้องเรียน นอกห้องเรียน หรือ ออนไลน์

$A$  คือ คะแนนเต็มของแบบฝึกปฏิบัติทุกชิ้นรวมกัน

$N$  คือ จำนวนผู้เรียน

$$\text{สูตรที่ 2} \quad E_2 = \frac{\sum F}{B} \times 100 \quad \text{หรือ} \quad \frac{\bar{F}}{B} \times 100$$

เมื่อ  $E_2$  คือ ประสิทธิภาพของผลลัพธ์

$\sum F$  คือ คะแนนรวมของผลลัพธ์ของการประเมินหลังเรียน

$B$  คือ คะแนนเต็มของการประเมินสุดท้ายของแต่ละหน่วยประกอบด้วยผลการสอนหลังเรียนและคะแนนจากการประเมินงานสุดท้าย

$N$  คือ จำนวนผู้เรียน

ข. โดยการคำนวณไม่ใช้สูตร

หากจำสูตรไม่ได้หรือไม่อยากใช้สูตร ก็สามารถใช้วิธีการคำนวณธรรมดาหาค่า  $E_1$  และ  $E_2$  ได้ ด้วยวิธีการคำนวณธรรมดา

สำหรับค่า  $E_1$  คือค่าประสิทธิภาพของงานและแบบฝึกปฏิบัติ กระทำได้โดยการนำคะแนนงานทุกชิ้นของนักเรียนในแต่ละกิจกรรมแต่ละคนมารวมกันแล้วหาค่าเฉลี่ยและเทียบส่วนโดยเป็นร้อยละ

สำหรับค่า  $E_2$  คือค่าประสิทธิภาพผลลัพธ์ของการประเมินหลังเรียนของแต่ละสื่อหรือชุดการสอน กระทำได้โดยการเอาคะแนนจากการสอบหลังเรียนและคะแนนจากงานสุดท้ายของนักเรียนทั้งหมดรวมกันหาค่าเฉลี่ยแล้วเทียบส่วนร้อยละ เพื่อหาค่าร้อยละ

การตีความหมายผลการคำนวณ

หลังจากคำนวณหาค่า  $E_1$  และ  $E_2$  ได้แล้ว ผู้หาประสิทธิภาพต้อง ตีความหมายของผลลัพธ์ โดยยึดหลักการและแนวทางดังนี้



1.1 ความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ ให้มีความคลาดเคลื่อนหรือความแปรปรวนของผลลัพธ์ได้ไม่เกิน .05 (ร้อยละ 5) จากช่วงต่ำไปสูง =  $\pm 2.5$  นั่นให้ ผลลัพธ์ของค่า  $E_1$  หรือ  $E_2$  ที่ถือว่าเป็นไปตามเกณฑ์มีค่าต่ำกว่าเกณฑ์ไม่เกิน 25 % และสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ไม่เกิน 25 %

หากคะแนน  $E_1$  หรือ  $E_2$  ห่างกันเกิน 5 % แสดงว่ากิจกรรมที่ให้ นักเรียนทำกับการสอบหลังเรียนไม่สมดุลกัน เช่น ค่า  $E_1$  มากกว่า  $E_2$  แสดงว่างานที่ มอบหมายอาจจะง่ายกว่าการสอบ หรือหากค่า  $E_2$  มากกว่าค่า  $E_1$  แสดงว่า การสอบง่ายกว่าหรือไม่สมดุลกับงานที่มอบหมายให้ทำ จำเป็นที่จะต้องปรับแก้

หากสื่อหรือชุดการสอนได้รับการออกแบบและพัฒนาอย่างดีมีคุณภาพ ค่า  $E_1$  หรือ  $E_2$  ที่คำนวณได้จากการทดสอบประสิทธิภาพจะต้องใกล้เคียงกันและ ต่างกันไม่เกิน 5 % ซึ่งเป็นตัวชี้ที่จะยืนยันได้ว่านักเรียนได้มีการเปลี่ยนพฤติกรรม ต่อเนื่องตามลำดับขั้นหรือไม่ก่อนที่จะมีการเปลี่ยนพฤติกรรมขั้นสุดท้าย หรืออีกนัย หนึ่งต้องประกันได้ว่านักเรียนมีความรู้จริง ไม่ใช่ทำกิจกรรมหรือทำสอบได้เพราะ การเดา

การประเมินในอนาคตจะเสนอผลการประเมินเป็นเลขสองตัว คือ  $E_1$  คู่  $E_2$  เพราะจะทำให้ผู้อ่านผลการประเมินทราบลักษณะนิสัยของผู้เรียนระหว่างนิสัยในการทำงานอย่างต่อเนื่อง คงเส้นคงวาหรือไม่ (ดูจาก  $E_1$  คือกระบวนการ) กับการทำงานสุดท้ายว่ามีคุณภาพมากน้อยเพียงใด (ดูจากค่า  $E_2$  คือผลลัพธ์) เพื่อ ประโยชน์ของการกลั่นกรองบุคลากรเข้าทำงาน

ตัวอย่าง นักเรียนสองคนคือเกษมและปรีชา เกษมได้ผลลัพธ์  $E_1/E_2 = 78.50 / 82.50$  ส่วนปรีชาได้ผลลัพธ์  $82.50/78.50$  แสดงว่านักเรียนคนแรกคือ เกษม ทำงานและแบบฝึกปฏิบัติ ทั้งปี 78 % และสอบไล่ได้ 83% จะเห็นว่าจะมี ลักษณะนิสัยที่เป็นกระบวนการสู่นักเรียนคนที่สองคือ ปรีชาที่ได้ผลลัพธ์  $E_1/E_2 = 82.50/78.50$  ไม่ได้

ขั้นตอนการทดสอบประสิทธิภาพ

เมื่อผลิตสื่อหรือชุดการสอนขึ้นเป็นต้นแบบแล้ว ต้องนำสื่อหรือชุดการ สอนไปหาประสิทธิภาพตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. การทดสอบประสิทธิภาพแบบเดี่ยว (1:1) เป็นการทดสอบ ประสิทธิภาพที่ผู้สอน 1 คน ทดสอบประสิทธิภาพสื่อ หรือชุดการสอนกับผู้เรียน 1 – 3 คน โดยใช้เด็กก่อน ปานกลาง และเด็กเก่งระหว่างทดสอบประสิทธิภาพให้จับ เวลาในการประกอบกิจกรรม สังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนว่า หงุดหงิด ทำหน้าฉงน หรือทำท่าทางไม่เข้าใจหรือไม่ ประเมินการเรียนจากกระบวนการ คือ กิจกรรมหรือ ภารกิจและงานที่มอบให้ทำและทดสอบหลังเรียน นำคะแนนมาคำนวณหาประสิทธิภาพ หากไม่ถึงเกณฑ์ต้องปรับปรุงเนื้อหาสาระ กิจกรรมระหว่างเรียนและ แบบทดสอบหลังเรียนให้ดีขึ้น โดยปกติคะแนนที่ได้จากการทดสอบประสิทธิภาพ แบบเดี่ยวนี้อาจได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์มาก แต่ไม่ต้องวิตกกังวลเมื่อปรับปรุงแล้วจะ สูงขึ้นมาก ก่อนนำไปทดสอบประสิทธิภาพแบบกลุ่มนั้นค่า  $E_1/E_2$  ที่ได้จะมีค่าประมาณ 60/60

2. การทดสอบประสิทธิภาพแบบกลุ่ม (1:10) เป็นการทดสอบ ประสิทธิภาพที่ผู้สอน 1 คน ทดสอบประสิทธิภาพสื่อหรือชุดการสอนกับผู้เรียน 6 - 10 คน (คณะผู้เรียนที่เก่ง ปานกลางกับอ่อน) ระหว่างทดสอบประสิทธิภาพให้จับ เวลาในการประกอบกิจกรรม สังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนว่า หงุดหงิด ทำหน้าฉงน หรือทำท่าทางไม่เข้าใจหรือไม่ หลังจากทดสอบประสิทธิภาพให้ประเมินการเรียน จากกระบวนการ คือกิจกรรมหรือภารกิจและงานที่มอบให้ทำและประเมินผลลัพธ์ คือการทดสอบหลังเรียนและงานสุดท้ายที่มอบให้นักเรียนทำส่งก่อนสอบประจำหน่วย ให้นำคะแนนมา คำนวณหาประสิทธิภาพ หากไม่ถึงเกณฑ์ต้องปรับปรุงเนื้อหา สาระ กิจกรรมระหว่างเรียนและแบบทดสอบหลังเรียนให้ดีขึ้น คำนวณหา ประสิทธิภาพแล้วปรับปรุง ในคราวนี้คะแนนของผู้เรียนจะ เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ อีกเกือบเท่าเกณฑ์โดยเฉลี่ยจะห่างจากเกณฑ์ประมาณ 10% นั่นคือ  $E_1/E_2$  ที่ได้จะมี ค่าประมาณ 70/70

3. การทดสอบประสิทธิภาพภาคสนาม (1:100) เป็นการทดสอบ ประสิทธิภาพที่ผู้สอน 1 คน ทดสอบประสิทธิภาพสื่อหรือชุดการสอนกับนักเรียนทั้ง ชั้น (ปกติให้ใช้กับผู้เรียน 30 คน แต่ใน โรงเรียนขนาดเล็กก่อนุโลมให้ใช้กับผู้เรียน 15 คน ขึ้นไป) ระหว่างทดสอบประสิทธิภาพให้จับเวลาในการประกอบกิจกรรม สังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนว่า หงุดหงิด ทำหน้าฉงน หรือทำท่าทางไม่เข้าใจหรือไม่ หลังจากทดสอบประสิทธิภาพภาคสนามแล้ว ให้ประเมินการเรียนจากกระบวนการ คือ กิจกรรมหรือภารกิจและงานที่มอบให้ทำและทดสอบหลังเรียน นำคะแนนมา คำนวณหาประสิทธิภาพ หากไม่ถึงเกณฑ์ต้องปรับปรุงเนื้อหา สาระ กิจกรรมระหว่าง เรียนและแบบทดสอบหลังเรียนให้ดีขึ้น แล้วนำไปทดสอบประสิทธิภาพภาคสนาม ซ้ำกับนักเรียนต่างกลุ่ม อาจทดสอบประสิทธิภาพ 2 - 3 ครั้ง จนได้ค่าประสิทธิภาพ ถึงเกณฑ์ขั้นต่ำ ปกติไม่น่าจะทดสอบประสิทธิภาพเกณฑ์สามครั้ง ด้วย เหตุนี้ ชั้นทดสอบประสิทธิภาพ ภาคสนามแทนด้วย 1:100

ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบ ประสิทธิภาพภาคสนามควรใกล้เคียงกัน เกณฑ์ที่ตั้งไว้ หากต่ำกว่าเกณฑ์ไม่เกิน 2.5% ก็ให้ยอมรับว่าสื่อหรือชุดการสอนมี ประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้

หากค่าที่ได้ต่ำกว่าเกณฑ์มากกว่า -2.5 ให้ปรับปรุงและทดสอบประสิทธิภาพภาคสนามซ้ำ จนกว่าจะถึงเกณฑ์ จะหยุดปรับปรุงแล้วสรุปว่า ชุดการสอนไม่มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ หรือจะลดเกณฑ์ลงเพราะ “ถอดใจ” หรือ ยอมแพ้ไม่ได้

หากสูงกว่าเกณฑ์ไม่เกิน +2.5 ก็ยอมรับว่าสื่อหรือชุดการสอนมี ประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้

หากค่าได้สูงกว่าเกณฑ์เกิน +2.5 ให้ปรับเกณฑ์ขึ้นไปอีกชั้นหนึ่ง เช่น ตั้งไว้ 80/80 ก็ให้ปรับขึ้นเป็น 85/85 หรือ 90/90 ตามค่าประสิทธิภาพได้

ตัวอย่าง เมื่อทดสอบหาประสิทธิภาพแล้วได้ 83.5/85.4 ก็แสดงว่าสื่อ หรือชุดการสอนนั้นมี ประสิทธิภาพ 83.5/85.4 ใกล้เคียงกับเกณฑ์ 85/85 ที่ตั้งไว้ แต่ถ้าตั้งเกณฑ์ไว้ 75/75 เมื่อผลทดสอบ ประสิทธิภาพเป็น 83.5/85.4 ก็อาจเลื่อนเกณฑ์ขึ้นมาเป็น 85/85 ได้

ดัชนีประสิทธิผล (Effectiveness Index: E.I.)

ดัชนีประสิทธิผล คือ ค่าตัวเลขที่ใช้พิจารณาว่าภายหลังการเรียนด้วยชุดการสอนหรือสื่อการเรียนที่ได้สร้างขึ้นผู้เรียนมีพัฒนาการมากกว่าก่อนการเรียนหรือไม่ ซึ่งมีวิธีการหาค่าดังนี้ (เผชญิ กิจระการ และ สมนึก ภัททิยธนี 2545)

1. การหาพัฒนาการที่เพิ่มขึ้นของผู้เรียนโดยอาศัยการหาค่า t-test แบบ Dependent Samples เป็นการพิจารณานักเรียนมีพัฒนาการเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ โดยทำการทดสอบนักเรียนทุกคนก่อนเรียนและหลังเรียนแล้วนำมาทดสอบความมีนัยสำคัญทางสถิติ หากมีนัยสำคัญทางสถิติ ก็ถือได้ว่านักเรียนกลุ่มที่ผู้วิจัยกำลังศึกษามีพัฒนาการเพิ่มขึ้นอย่างเชื่อถือได้

2. การหาพัฒนาการที่เพิ่มขึ้นของผู้เรียนโดยการหาค่าดัชนีประสิทธิผล ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\text{ดัชนีประสิทธิผล} = \frac{\text{ผลรวมของคะแนนหลังเรียนทุกคน} - \text{ผลรวมของคะแนนก่อนเรียนทุกคน}}{(\text{จำนวนนักเรียน} \times \text{คะแนนเต็ม}) - \text{ผลรวมของคะแนนก่อนเรียนทุกคน}}$$

หรือหาดัชนีประสิทธิผลในรูปร้อยละ ดังนี้

$$\text{ดัชนีประสิทธิผล} = \frac{\text{ร้อยละของผลรวมคะแนนหลังเรียน} - \text{ร้อยละของผลรวมของคะแนนก่อนเรียน}}{100 - \text{ร้อยละผลรวมของคะแนนก่อนเรียน}}$$

ข้อสังเกตเกี่ยวกับค่าดัชนีประสิทธิผล

1. ดัชนี E.I. เป็นเรื่องของอัตราส่วนของผลต่าง จะมีค่าสูงสุดเป็น 1.00 ส่วนต่ำสุดไม่สามารถกำหนดได้เพราะมีค่าต่ำกว่า -1000 ก็ได้ และถ้าเป็นค่าลบแสดงว่า คะแนนผลสอบก่อนเรียนมากกว่าหลังเรียน ซึ่งมีความหมายว่าระบบการเรียนการสอนหรือสื่อที่ใช้ไม่มีคุณภาพ และก่อนจะหาค่าดัชนี E.I. ต้องหาค่า E1/E2 มาก่อน ค่า E2 คือคะแนนวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งจะเป็นค่าเดียวกับคะแนนหลังเรียนของการหาค่า E.I. ดังนั้นหากคะแนนหลังสอนต่ำหรือมากกว่าคะแนนก่อนสอน ค่า E2 จะไม่ถึงเกณฑ์ที่กำหนด ซึ่งทำให้ไม่จำเป็นต้องหาค่า E.I. ตามมา แต่ถ้าปรับปรุงสื่อการสอนให้ดีขึ้นทำให้ค่า E2 ถึงเกณฑ์ การหาค่าดัชนี E.I. ก็จะมีค่าสูงไปเอง โดยดัชนีประสิทธิผลที่ใช้ได้ควรมีค่า 0.50 ขึ้นไป

2. การแปลความหมายค่าดัชนี E.I. ค่าดัชนีประสิทธิผลมีค่าเท่ากับ 0.624 หรือคิดเป็นร้อยละ 62.4 หมายความว่านักเรียนมีความก้าวหน้าทางพัฒนาการเรียนรู้อันเพิ่มขึ้นร้อยละ 62.4 (ไม่ใช่แสดงว่านักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นร้อยละ 62.4)

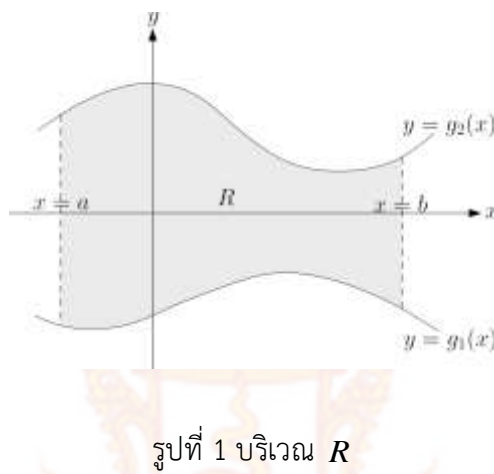
### การหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

จากการศึกษาการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น พบว่าได้มีการให้นิยามของการพื้นที่ไว้ดังนี้

พิจารณากรณีของ  $f$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง โดยที่  $f(x, y) \geq 0$  บนบางบริเวณ  $R \subset \mathfrak{R}$  ถ้า  $R$  อยู่ในรูป

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 1



และจากปริมาตร  $V$  ที่อยู่ใต้ผิว  $z = f(x, y)$  และอยู่เหนือบริเวณ  $R$  นิยามโดย

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

สำหรับทุก ๆ ค่า  $x$  แล้ว  $A(x)$  จะเป็นพื้นที่ของภาคตัดขวางของทรงตันที่สอดคล้องกับค่าเฉพาะของ  $x$  โดยบทนิยามของปริพันธ์จำกัดเขตจะได้ว่า

$$\int_a^b A(x) dx = \lim_{\|P_1\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x_i \quad (2)$$

โดยที่  $P_1$  จะหมายถึงผลแบ่งกันของช่วงปิด  $[a, b]$  และ  $c_i$  คือจุดใดจุดหนึ่งที่อยู่ในช่วงย่อย  $[x_{i-1}, x_i]$  และ  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  (ความกว้างของช่วงย่อยที่  $i$ )

สำหรับทุก ๆ ค่า  $x \in [a, b]$  เนื่องจาก  $A(x)$  เป็นพื้นที่ของภาคตัดขวางเราจะได้ว่า

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \lim_{\|P_2\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f(x, v_j) \Delta y_j \quad (3)$$

โดยที่  $P_2$  จะหมายถึงผลแบ่งกันของช่วงปิด  $[g_1(x), g_2(x)]$  และ  $v_j$  คือจุดใดจุดหนึ่งที่อยู่ในช่วงย่อย  $[y_{j-1}, y_j]$  ของผลการแบ่งกัน และ (ความกว้างของช่วงย่อยที่  $j$ ) โดยการรวมสมการที่ (1), (2) และ (3) เข้าด้วยกันจะได้ว่า

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x_i$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[ \lim_{\|P_2\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f(c_i, v_j) \Delta y_j \right] \Delta x_i \\
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \lim_{\|P_2\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_i, v_j) \Delta y_j \Delta x_i \quad (4)
\end{aligned}$$

ผลรวมคู่ปรากฏในสมการ (4) จะถูกเรียกว่า ผลบวกริมมันน์คู่ (Double Riemann Sum) ซึ่งทุก ๆ พจน์ จะสมนัยกับกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาว ความกว้าง และความสูงเป็น  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  และ  $f(c_i, v_j)$  ตามลำดับ ซึ่งเราพบว่าจากการซ้อนทับกันของสองผลแบ่งกัน เราจะได้ผลแบ่งกันภายในของบริเวณ  $R$  ถ้าเราแทนผลแบ่งกันภายในของ  $R$  ด้วย  $P$  และแทนนอร์ม (Norm) ของผลแบ่งกัน  $P$  ด้วย  $\|P\|$  ซึ่งจะหมายถึงความยาวของเส้นทแยงมุมที่ยาวที่สุดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในผลแบ่งกัน เราจะสามารถเขียนสมการ (4) ด้วยลิมิตเพียงตัวเดียวในรูป

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_i, v_j) \Delta y_j \Delta x_i \quad (5)$$

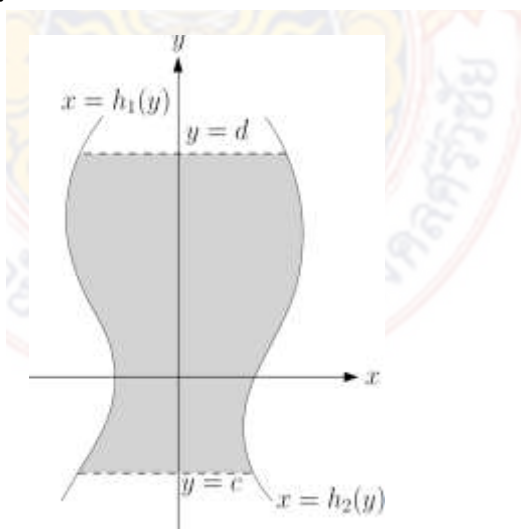
ทำให้เราสามารถเขียนสมการ (5) ในรูปของปริพันธ์แทนการหาปริมาตรได้เป็น

$$\begin{aligned}
V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_i, v_j) \Delta y_j \Delta x_i \\
&= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (6)
\end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกันกับ  $f$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง โดยที่  $f(x, y) \geq 0$  บนบางบริเวณ  $R \subset \mathfrak{R}$  ถ้า  $R$  อยู่ในรูป

$$R = \{(x, y) | h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

ซึ่งแสดงไว้ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 บริเวณ  $R$

เราสามารถนิยามการหาปริมาตรของทรงตันผ่านปริพันธ์สองชั้นได้เป็น

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f(c_i, v_j) \Delta x_i \Delta y_j \\
 &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy
 \end{aligned} \tag{7}$$

สำหรับบริเวณที่มีขอบเขต (Bounded Region)  $R \subset \mathbb{R}^2$  นั้น ปริพันธ์ที่เขียนในรูป  $\iint_R 1 dA$  หรือเขียนโดยทั่วไปในรูป  $\iint_R dA$  จะหมายถึงปริมาตรใต้ผิว  $z=1$  เหนือบริเวณ  $R$  ซึ่งอยู่ในระนาบ  $xy$  และเนื่องจากทุก ๆ ภาคตัดขวางที่ขนานกับระนาบ  $xy$  จะมีลักษณะเหมือนกัน จะทำให้ทรงตันเป็นทรงกระบอกและ ปริมาตรของทรงตันจะเกิดจากการคูณกันของ ความสูงที่มีค่าเป็น 1 คูณกับพื้นที่ภาคตัดขวาง ซึ่งจะได้ว่า

$$\iint_R dA = (1)(\text{Area of } R) = \text{Area of } R \tag{8}$$

เราเรียกสมการ (8) ว่านิยามการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

### ความหมายของความพึงพอใจ

นักวิชาการหลายท่านได้ให้ความหมายของความพึงพอใจไว้ ดังนี้

ทวีพงษ์ หินคำ (2541 : 8) ได้ให้ความหมายของความพึงพอใจว่าเป็นความชอบของบุคคลที่มีต่อสิ่งหนึ่งสิ่งใด ซึ่งสามารถลดความตึงเครียดและตอบสนองความต้องการของบุคคลได้ทำให้เกิดความพึงพอใจต่อสิ่งนั้น

ธनिया ปัญญาแก้ว (2541 : 12) ได้ให้ความหมายว่า สิ่งที่ทำให้เกิดความพึงพอใจที่เกี่ยวกับลักษณะของงาน ปัจจัยเหล่านี้นำไปสู่ความพอใจในงานที่ทำ ได้แก่ ความสำเร็จ การยกย่อง ลักษณะงาน ความรับผิดชอบ และความก้าวหน้า เมื่อปัจจัยเหล่านี้อยู่ต่ำกว่า จะทำให้เกิดความไม่พอใจงานที่ทำ ถ้าหากงานให้ความก้าวหน้า ความท้าทาย ความรับผิดชอบ ความสำเร็จและการยกย่องแก่ผู้ปฏิบัติงานแล้ว พวกเขาจะพอใจและมีแรงจูงใจในการทำงานเป็นอย่างมาก

วิทย์ เทียงบุญธรรม (2541 : 754) ให้ความหมายของความพึงพอใจว่า หมายถึง ความพอใจ การทำให้พอใจ ความสนใจ ความสนใจ ความตั้งใจ ความสนใจ การชดเชย การไถ่บาปการแก้แค้นสิ่งที่ชดเชย

วิรุฬ พรรณเทวี (2542 : 11) ให้ความหมายไว้ว่า ความพึงพอใจเป็นความรู้สึกภายในจิตใจของมนุษย์ที่ไม่เหมือนกัน ซึ่งเป็นอยู่กับแต่ละบุคคลว่าจะคาดหวังกับสิ่งหนึ่ง สิ่งใดอย่างไร ถ้าคาดหวังหรือมีความตั้งใจมากและได้รับการตอบสนองด้วยดี จะมีความพึงพอใจมากแต่ในทางตรงกันข้ามอาจผิดหวังหรือไม่พึงพอใจเป็นอย่างยิ่ง เมื่อไม่ได้รับการตอบสนองตามที่คาดหวังไว้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับสิ่งที่ตนตั้งใจไว้ว่าจะมีมากหรือน้อย

กชกร เป้าสุวรรณ และคณะ (2550) ได้กล่าวถึง ความหมายของความพึงพอใจว่า สิ่งที่ควรจะเป็นไปตามความต้องการ ความพึงพอใจเป็นผลของการแสดงออกของทัศนคติของบุคคลอีกรูปแบบ

หนึ่ง ซึ่งเป็นความรู้สึกเอนเอียงของจิตใจที่มีประสบการณ์ที่มนุษย์เราได้รับอาจจะมากหรือน้อยก็ได้ และเป็นความรู้สึกที่มีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ซึ่งเป็นไปได้ทั้งทางบวกและทางลบ แต่ก็เมื่อได้สิ่งนั้น สามารถตอบสนองความต้องการ หรือทำให้บรรลุจุดมุ่งหมายได้ ก็จะทำให้เกิดความรู้สึกบวก เป็นความรู้สึกที่พึงพอใจ แต่ในทางตรงกันข้าม ถ้าสิ่งนั้นสร้างความรู้สึกรอคอย ก็จะทำให้เกิดความรู้สึกทางลบ เป็นความรู้สึกไม่

Applewhite (1965) ได้กล่าวถึง ความพึงพอใจ เป็นความรู้สึกส่วนตัวของบุคคลในการปฏิบัติงาน ซึ่งรวมไปถึงความพึงพอใจเป็นความรู้สึกส่วนตัวของบุคคลในการปฏิบัติงาน ซึ่งรวมไปถึงความพึงพอใจในสภาพแวดล้อมทางกายภาพด้วย การมีความสุขที่ทำงานร่วมกับคนอื่นที่เข้ากันได้มีทัศนคติที่ดีต่องานด้วย

ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า ความพึงพอใจหมายถึงความรู้สึกที่ขึ้นอยู่กับแต่ละบุคคลในการตัดสินใจว่าสิ่งใดสิ่งหนึ่งดีหรือไม่ดี ซึ่งเป็นผลมาจากการที่สิ่งนั้นตอบสนองความต้องการของบุคคลนั้นได้หรือไม่

### การวัดความพึงพอใจ

การวัดความพึงพอใจสามารถทำได้หลายวิธีดังนี้ (สาโรจน์ ไสยสมบัติ , 2534: 39)

1. การใช้แบบสอบถามซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้มากอย่างแพร่หลายวิธีหนึ่ง
2. การสัมภาษณ์ซึ่งเป็นวิธีที่ต้องอาศัย เทคนิคและความชำนาญพิเศษของผู้สัมภาษณ์ที่จะจูงใจให้ผู้ตอบคำถามตามข้อเท็จจริง
3. การสังเกต เป็นการสังเกตพฤติกรรมทั้ง ก่อนการปฏิบัติกิจกรรม ขณะปฏิบัติกิจกรรมและหลังการปฏิบัติกิจกรรมจะเห็นได้ว่าการวัดความพึงพอใจในการเรียนรู้สามารถที่จะวัดได้หลายวิธี ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความ สะดวกความเหมาะสม ตลอดจนจุดมุ่งหมาย หรือเป้าหมายของการวัดด้วย จึงจะส่งผลให้การวัดนั้น มีประสิทธิภาพน่าเชื่อถือ

### งานวิจัยในประเทศ

ชาตรี ชัยลอม กิตติศักดิ์ คำผัด เอกชัย ไก่แก้ว ดำรง สุพล และเรวัช จิตจง (2558) ได้พัฒนาและหาประสิทธิภาพของสื่อการสอนระบบ เทคโนโลยี AR โดยการผลิตสื่อสามมิติระบบปฏิสัมพันธ์ เรื่อง หลักปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง โดยใช้ เทคโนโลยี AR บนมือถือ และ ศึกษาความพึงพอใจของ นักศึกษาสาขางานเทคโนโลยีสารสนเทศ และ ครูวิทยาลัยเทคนิคแพร่ ที่มีต่อสื่อการสอนระบบ เทคโนโลยี AR ประชากรที่ใช้ในการศึกษา ได้แก่ นักศึกษาสาขางานเทคโนโลยีสารสนเทศ และ ครูวิทยาลัยเทคนิคแพร่ พบว่า สื่อการสอนระบบเทคโนโลยี AR โดยการผลิตสื่อสามมิติระบบปฏิสัมพันธ์ เรื่อง หลัก ปรัชญาเศรษฐกิจพอเพียง โดยใช้เทคโนโลยีAR บนมือถือ มีประสิทธิภาพเท่ากับ 75.00/75.75 และ นักศึกษาสาขางานเทคโนโลยีสารสนเทศ มีความพึงพอใจต่อสื่อการสอนระบบ เทคโนโลยี AR โดยภาพรวมอยู่ในระดับมากที่สุดมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.71 (S.D.=0.49) และ ครู

วิทยาลัยเทคนิคแพร่ มีความพึงพอใจต่อสื่อการสอนระบบเทคโนโลยี AR โดยภาพรวมอยู่ในระดับมาก มีค่าเฉลี่ย เท่ากับ 4.43 (S.D.=0.79)

วิวัฒน์ มีสุวรรณ (2554) ได้ศึกษารูปแบบการเรียนรู้ด้วยการสร้างโลกเสมือนผสมผสานโลกจริง (AUGMENTED REALITY TECHNOLOGY FOR LEARNING) พบว่า ในบรรดาเทคโนโลยี มีอยู่กลุ่มหนึ่งของเทคโนโลยีที่น่าสนใจและสามารถเข้าถึงได้ก็คือ การผสมผสานระหว่างสภาพแวดล้อมที่เป็นจริงกับเทคโนโลยีเสมือนจริง เป็นประสบการณ์ใหม่ที่เกิดขึ้น ได้จริงจากการผสมผสานโลกเสมือนจริงกับโลกจริง จะตอบสนองต่อการเรียนรู้ และรวมถึงความ หลากหลายของส่วนประกอบหรืออุปกรณ์อื่น ๆ บางอย่างของโลกแห่งความจริง เช่น พื้นที่ ระยะเวลา ลักษณะทางกายภาพวัตถุจริง เงื่อนไขหรือข้อกำหนดของสภาพแวดล้อมจริง โดยสามารถนำข้อมูลส่ง ประมวลผลและสามารถผสมผสานกับวัตถุแบบดิจิทัลได้ ช่วยเพิ่มศักยภาพการเรียนรู้ การค้นคว้า หากความรู้ของผู้เรียน เกิดปฏิสัมพันธ์กับโลกเสมือนผสมผสานโลกจริงที่ช่วยลดรอยต่อของการปฏิสัมพันธ์ ระหว่างโลกจริงกับโลกเสมือน นักการศึกษาควรศึกษาวิจัยค้นหาประเด็นเกี่ยวกับเทคโนโลยีนี้เพื่อให้ คุณลักษณะหรือวิธีการที่เหมาะสมและดีที่สุดในการประยุกต์ใช้กับสภาพแวดล้อมการเรียนรู้ที่ แตกต่างกันไป ต้องมีกระบวนการที่สะท้อนการรับรู้ของผู้เรียนอย่างรอบคอบ โดยคำนึงถึงผลที่ ก่อให้เกิดประโยชน์และเสริมสร้างการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

เสาวภา กลิ่นสูงเนิน (2558) ได้ศึกษาการพัฒนาสื่อเทคโนโลยีเสมือนจริงเรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่า สื่อเทคโนโลยีเสมือนจริงเรื่องการทำงานของคอมพิวเตอร์มีคุณภาพในภาพรวมอยู่ในระดับดีมาก ( $\bar{x}$  =4.90) เมื่อพิจารณาเป็นรายด้านพบว่า คุณภาพด้านเนื้อหาอยู่ในระดับดีมาก ( $\bar{x}$  =4.92) และคุณภาพด้านเทคนิคการผลิตสื่ออยู่ในระดับดีมาก ( $\bar{x}$  =4.88) ประสิทธิภาพของบนเรียนมีประสิทธิภาพ  $E_1/E_2$  เท่ากับ 89.67/87.31 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไม่ต่ำกว่า 80/80 และนักเรียนที่เรียนด้านเทคโนโลยีเสมือนจริง เรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีปกติ อย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

สมรัก แก้วนิ่ม (2556) รายงานผลการใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง คอมพิวเตอร์ ชั้น ม.1 ผลการศึกษาค้นคว้าพบว่า

1. บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี เรื่องคอมพิวเตอร์เบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้น ม.1 มีประสิทธิภาพ 88.80/85.75
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01
3. นักเรียนมีความพึงพอใจต่อบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน กลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี เรื่องคอมพิวเตอร์เบื้องต้น โดยภาพรวมอยู่ในระดับมากที่สุด

จิตรลดา ศรีจันทร์ดี (2557) รายงานผลการพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง เทคโนโลยี สารสนเทศและการสื่อสาร ผลการศึกษาพบว่า



1. ผลการหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง เทคโนโลยีสารสนเทศ และการสื่อสาร สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีประสิทธิภาพเท่ากับ 84.89/85.50

2. มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

3. ผลการวิเคราะห์หาค่าดัชนีประสิทธิผลของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง เทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีค่าดัชนีประสิทธิผลเท่ากับ 0.6901 แสดงว่านักเรียนมีความรู้เพิ่มขึ้น คิดเป็นร้อยละ 69.01

4. ผลการศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนบางไทรวิทยา สง. เขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 3 พบว่านักเรียนมีความพึงพอใจต่อบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน อยู่ในระดับมาก

เอกรัฐ หล่อพิเชียร (2559) ได้พัฒนาสื่อการเรียน รู้ความเป็นจริงเสริม (Augmented Reality) เรื่อง โพรโตคอล TCP/PI เพื่อเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาพบว่า

1. การพัฒนาสื่อการเรียนรู้ความเป็นจริงเสริม เรื่องโพรโตคอล TCP/PI วิชาการสื่อสารข้อมูล และเครือข่ายคอมพิวเตอร์ พบว่านักศึกษาทำกิจกรรมและแบบทดสอบระหว่างเรียนได้ถูกต้อง โดยเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 85.00 และทำแบบทดสอบหลังเรียนได้ถูกต้องโดยเฉลี่ยคิดเป็นร้อยละ 92.58 ดังนั้นประสิทธิภาพสื่อการเรียนรู้ความเป็นจริงเสริม มีค่าเท่ากับ 85.00/92.55 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนด้วยสื่อการเรียนรู้ความเป็นจริงเสริม สูงกว่าก่อนการเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05

3. ระดับความพึงพอใจของผู้เรียนจากการใช้สื่อการเรียนความเป็นจริงเสริม มีค่าเฉลี่ยทั้งหมดอยู่ในระดับมากที่สุด  $\bar{x} = 4.55$  และ  $SD = 0.683$

เสาวภา กลิ่นสูงเนิน (2558) ได้ศึกษาการพัฒนาสื่อเทคโนโลยีเสมือนจริง เรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่า สื่อเทคโนโลยีเสมือนจริง เรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์ มีคุณภาพโดยรวมอยู่ในระดับดีมาก ( $\bar{x} = 4.90$ ) เมื่อพิจารณาเป็นรายด้านพบว่า คุณภาพด้านเนื้อหาอยู่ในระดับดีมาก ( $\bar{x} = 4.92$ ) และคุณภาพด้านเทคนิคการผลิตสื่ออยู่ในระดับดีมาก ( $\bar{x} = 4.88$ ) ประสิทธิภาพของบทเรียนมีประสิทธิภาพ  $E_1/E_2$  เท่ากับ 89.67/87.31 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไม่ต่ำกว่า 80/80 และนักเรียนที่เรียนด้วยสื่อเทคโนโลยีเสมือนจริง เรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

### งานวิจัยต่างประเทศ

Bemd Mayer and Hannes (2007) ได้ศึกษาทำการศึกษาเรื่องการจำลองการทดลองทางฟิสิกส์ในโลกเสมือนผสมผสานโลกจริง ได้นำ AR มาประยุกต์ใช้กับการศึกษากลศาสตร์ เพื่อจำลองการทดลองทางฟิสิกส์แบบมีปฏิสัมพันธ์กับผู้ใช้ได้ในทันที (Real Time) นักเรียนจะสร้างและศึกษาการทดลองด้วยตนเองในโลกเสมือนจริง 3 มิติ มีเครื่องมือหลากหลายสำหรับวิเคราะห์ เรื่องแรง มวล

และคุณสมบัติอื่น ๆ ของวัตถุทั้งก่อน ระหว่าง และหลังการทดลอง ใช้เนื้อหาใหม่ในการสอน เพื่อสำรวจจุดเด่นของสภาพแวดล้อมเสมือนจริง โดยวิธีการอธิบายการเคลื่อนไหวร่วมกันของวัตถุที่มนุษย์รับรู้ในชีวิตประจำวันด้วยกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของไอแซค นิวตัน คือ แรง ความเร็ว และความเร่ง

Brett E. Shelton and Nicholas R. Hedley (2002) ได้ทำการศึกษาเรื่องการใช้นวัตกรรมเทคโนโลยี ออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ARToolKit ในการสอนเรื่องความสัมพันธ์ของโลกกับพระอาทิตย์สำหรับ นักศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ โดยการให้นักศึกษาจำนวน 30 คน มีส่วนร่วมในการใช้เทคโนโลยีออกเมนต์ เตด เรียลลิตี้ ในการทำแบบฝึกหัด โดยให้ออกแบบหุ่นจำลองในการสอนเรื่องการโคจร เรื่องอายัน หรือจุดที่ดวงอาทิตย์โคจรไปสูงสุดทางเหนือและใต้ และเรื่องการเปลี่ยนแสงและฤดูกาล พบว่า นักศึกษามีความเข้าใจที่ดีขึ้นหลังจากทำแบบฝึกหัดที่ใช้เทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

Dunleavy, M., and Dede, C. (2012) การทบทวนวรรณกรรมเน้นความสำคัญที่เทคโนโลยี ออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เพื่อการเรียนรู้โดยใช้เทคโนโลยีการเคลื่อนที่ การล่องรู้บริบท เช่น สมาร์ทโฟน แท็บเล็ต ซึ่งสามารถทำให้ผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์กับข้อมูลดิจิทัล ที่ถูกฝังอยู่ในสภาพแวดล้อมทาง กายภาพ ผลการวิจัยพบว่าการเรียนรู้ในสภาพแวดล้อมแบบทางการและไม่ทางการ เช่น โรงเรียน มหาวิทยาลัย พิพิธภัณฑ์ สานสารธารณะ สวนสัตว์ เป็นต้น ซึ่งเน้นวิธีการใช้งานและข้อจำกัดของ เทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ในการเรียนการสอน และออกแบบบทเรียนในฐานะคู่มือเสริม ปัญหาและวิธีการสอนเทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ถูกนำมาใช้กับทฤษฎีสร้างความรู้ใหม่โดย ผู้เรียนเอง โดยให้ผู้เรียนเสมือนอยู่ในกายภาพของโลกความจริงและบริบทของสังคมในขณะให้ แนวทาง ในระหว่างการเรียนมีการเสริมติ้อและอำนวยความสะดวกในการเรียน และเป็นกระบวนการ เรียนรู้แบบอภิปัญญา เช่นการสืบค้นตามสภาพจริง การสำรวจ การนิเทศแบบเพื่อนช่วยเพื่อน การ สอนแบบซึ่งกันและกัน และรูปแบบการเรียนรู้แบบมีส่วนร่วมกับตัวอย่างที่หลากหลาย

Enyedy (2012) ทำการวิจัยเกี่ยวกับการเรียนการสอนฟิสิกส์โดยการเล่น ผ่าน สภาพแวดล้อมความจริงเสมือน กับผู้เรียนอายุ 6 – 8 ปี ผลการศึกษาจากการทดสอบก่อนเรียน – หลัง เรียน พบว่า ผู้เรียนมีความเข้าใจและสามารถพัฒนาความคิดรวบยอดของ แรง, แรงลัพธ์, แรงเสียด ทาน และการเคลื่อนที่สองมิติหลังจากทำการเรียนด้วยหลักสูตรการเรียนรู้ฟิสิกส์ผ่านการเล่น ผู้วิจัย ยังได้เสนอกรณีศึกษา 2 กรณีที่แสดงให้เห็นถึงการนำหลักการนี้ในทางปฏิบัติโดยจาก กรณีศึกษา แสดงให้เห็นถึงการเชื่อมโยง ระหว่างการใช้ความจริงเสมือน กับการเล่น อย่างมีความหมาย และรู้ แบบของนิเวศเชิงสัญลักษณ์ของการเรียนรู้ด้วยวิธีการสืบเสาะทาง วิทยาศาสตร์ในตัวผู้เรียนอีกด้วย

Rees (2008) ทำการวิจัยโดยใช้เกมความจริงเสมือน ชื่อ “The Heat Game” เพื่อพัฒนา ความรู้ทางวิทยาศาสตร์โดยการสร้างสถานการณ์จำลองให้ผู้เรียนเป็นนักวิทยาศาสตร์รุ่นเยาว์เพื่อ ออกแบบบ้านประหยัดพลังงาน ในการศึกษาขั้นต้น แสดงให้เห็นว่า หลังผู้เรียนได้เล่นเกม ผู้เรียนมี การพัฒนาความเข้าใจและเจตคติเกี่ยวกับกระบวนการทางวิทยาศาสตร์, การสร้างความรู้, การนำ ความรู้ทางวิทยาศาสตร์ไปใช้ในการพัฒนาเทคโนโลยีและกระบวนการเลือกใช้นวัตกรรมอย่างชาญ ฉลาดเพื่อช่วยลดผลกระทบต่อสิ่งแวดล้อม

Margarita Vilkoniene (2009) ได้ทำการศึกษาเรื่อง อิทธิพลของเทคโนโลยีโลกเสมือนผสมผสานโลกจริงที่มีผลต่อการเรียนรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับระบบทางเดินอาหารของมนุษย์ ซึ่งจากผลการวิจัยแสดงให้เห็นว่าสภาพแวดล้อมการเรียนรู้เสมือนช่วยให้ผลการเรียนรู้สูงขึ้น จากกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 7 จำนวน 110 คน ส่งผลต่อการเรียนรู้ ผลการวิจัยแสดงให้เห็นว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ที่สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ

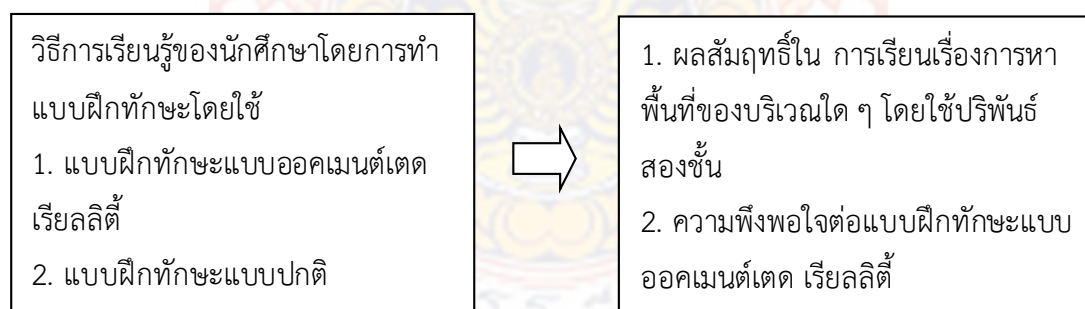
จากงานวิจัยทั้งในและต่างประเทศที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ชัดว่า การนำเทคโนโลยี Augmented Reality เข้ามาช่วยในด้านการเรียนการสอน ไม่ว่าจะเป็นรูปแบบการสอน สื่อการเรียนการสอน หรือแบบทดสอบ เป็นต้น จะส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนดีขึ้น ผู้เรียนเกิดการพัฒนาทักษะ มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับสิ่งที่เรียน มีความพร้อมที่จะเรียนรู้จริง โดยที่ที่สำคัญคือตัวผู้สอนเองจะต้องออกแบบสื่อการเรียนการสอนให้น่าสนใจ สร้างความกระตือรือร้นให้ผู้เรียนมีความต้องการที่จะเรียนรู้และสนใจในศาสตร์นั้น ๆ อีกทั้งยังส่งผลต่อเจตคติที่ดีของผู้เรียนในวิชานั้น ๆ อีกด้วย

### กรอบความคิดในการวิจัย

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และการนำเทคโนโลยีดังกล่าวมาใช้ในการเรียนการสอนทำให้ผู้วิจัยมีความคิดว่าหากนักศึกษาใช้วิธีการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ จะส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความพึงพอใจต่อแบบฝึกหัดของนักศึกษามีผลดีกว่านักศึกษาที่ใช้วิธีการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกหัดแบบปกติ ผู้วิจัยจึงกำหนดกรอบความคิดในการวิจัยครั้งนี้ด้วยแผนภาพดังต่อไปนี้

ตัวแปรต้น

ตัวแปรตาม



### สมมุติฐานการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่เกิดจากการทำแบบฝึกทักษะของนักศึกษา เรื่องการทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ มีความแตกต่างกับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ และนักศึกษาที่ใช้วิธีการเรียนรู้โดยการทำแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ มีความพอใจอยู่ในระดับมาก



### บทที่ 3

#### วิธีดำเนินการวิจัย

##### ประชากร

ประชากร คือ นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย สงขลา ซึ่งลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 222 คน

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย สงขลา ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 2 กลุ่มเรียน กลุ่มละ 45 คน เลือกตัวอย่างโดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Sampling) และเลือกให้วิธีการทดลอง ให้กับกลุ่มตัวอย่างโดยการจับฉลาก

##### ขอบเขตด้านเนื้อหา

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้เนื้อหาเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

##### แบบแผนการทดลอง

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงเตรียมทดลอง (Pre-Experimental Design) ผู้วิจัยใช้รูปแบบเปรียบเทียบกับกลุ่มคงที่ (Two Groups Static Design)

กลุ่ม	ตัวแปรอิสระ	ทดสอบหลัง
กลุ่มทดลอง (E)	วิธีการเรียนรู้ของนักศึกษาโดยการทำแบบฝึกทักษะออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ (X)	Y2
กลุ่มควบคุม (C)	วิธีการเรียนรู้ของนักศึกษาโดยการทำแบบฝึกทักษะแบบปกติ (-)	Y2

##### เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้มี 3 ชนิด ดังนี้

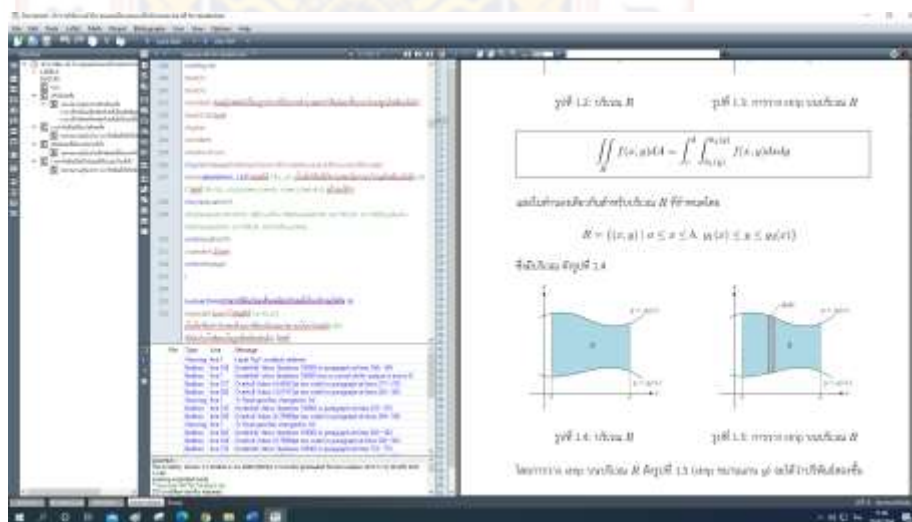
1. แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะจำนวน 4 หัวข้อ
2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นจำนวน 1 ชุด มีลักษณะเป็นแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ
3. แบบสอบถามความพึงพอใจต่อการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

## วิธีการสร้างเครื่องมือ

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างเครื่องมือ ซึ่งได้แก่แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น และแบบสอบถามความพึงพอใจต่อการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

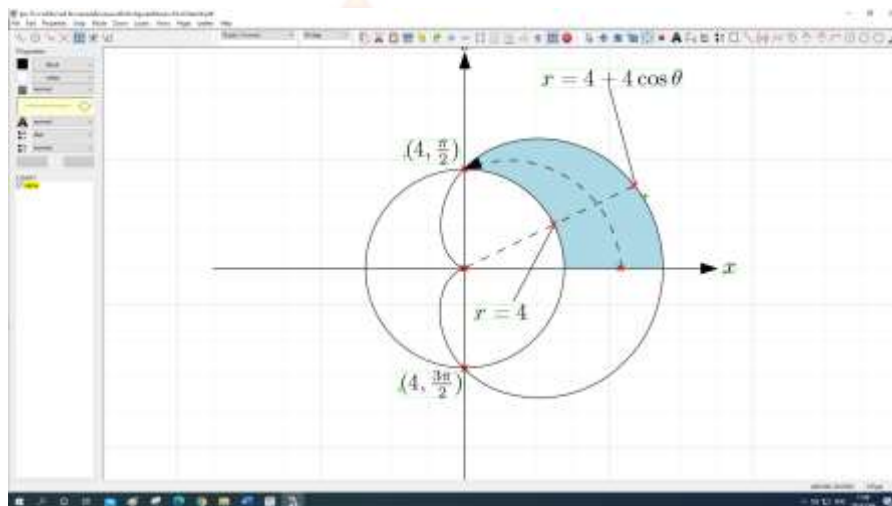
### การสร้างแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

1. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยเกี่ยวกับเทคโนโลยีออกคอคเมนต์เตด เรียลลิตี้
2. ศึกษาความหมาย ลักษณะที่ดี และวิธีการสร้างของแบบฝึกทักษะ
3. ศึกษาพื้นฐาน รายละเอียด ตัวอย่างโจทย์ เกี่ยวกับการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น
4. จัดเตรียมข้อมูลก่อนสร้างแบบแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยมีรายละเอียดดังนี้
  - 4.1 กำหนดเนื้อหาพื้นฐานที่จำเป็นของการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น
  - 4.2 รวบรวมตัวอย่างโจทย์เกี่ยวกับการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ทั้งในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว
  - 4.3 พิมพ์ตัวอย่างโจทย์แบบฝึกทักษะเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยใช้โปรแกรม Latex จากนั้นนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญ ตรวจสอบความเหมาะสมของเนื้อหา และจุดประสงค์ ของแบบฝึกทักษะ



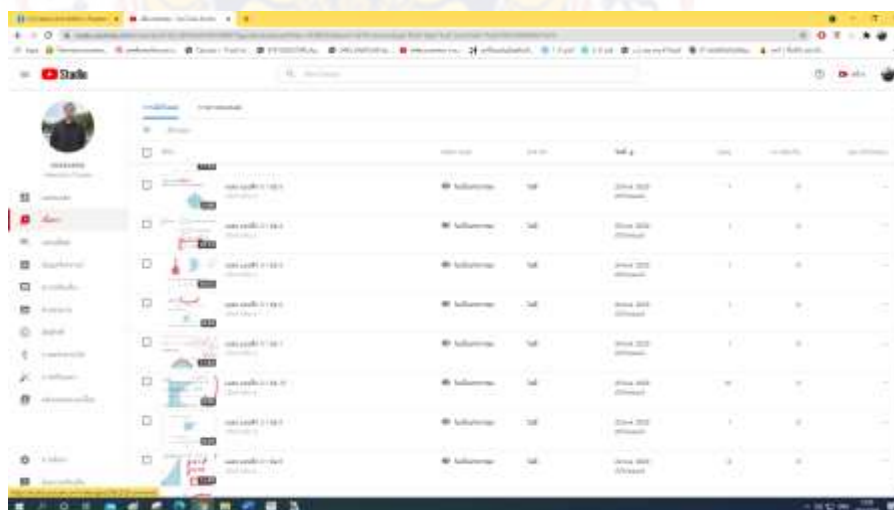
รูปที่ 1 การสร้างตัวอย่างโจทย์โดยใช้โปรแกรม Latex

4.4 สร้างเฉลยสำหรับแบบฝึกทักษะเรื่องการหาพื้นที่ใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยใช้โปรแกรม Latex และสร้างภาพประกอบเฉลยแต่ละข้อโดยใช้โปรแกรม IPE จากนั้นนำไปให้ผู้เชี่ยวชาญ ตรวจสอบความเหมาะสมของเฉลยแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้



รูปที่ 2 การสร้างภาพประกอบแบบฝึกทักษะโดยใช้โปรแกรม IPE

4.5 นำเฉลยที่สร้างได้จากขั้นตอนที่ 4.4 มาสร้างเป็นวิดีโออธิบายเฉลย พร้อมทั้งนำวิดีโอที่ได้ไปอัปโหลดบนช่อง youtube และนำ URL ของแต่ละวิดีโอที่อัปโหลดไปใช้ในการเชื่อมต่อกับ Marker ซึ่งอยู่ในขั้นตอนการพัฒนาแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น



รูปที่ 3 การอัปโหลดเฉลยแบบฝึกทักษะบน youtube

5. ดำเนินการสร้างแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้เรื่องการทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยการจตุรูปเล่มและใส่ Marker สำหรับการใช้เทคโนโลยีแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ในแต่ละข้อสำหรับการนำใช้ร่วมกับแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้เรื่องการทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น
6. สร้างแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้เรื่อง การทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ซึ่งเป็นแอปพลิเคชันนี้ จะเป็นการทำงานโดยใช้รูปแบบของเทคโนโลยีออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ซึ่งเป็นรูปแบบการผสมผสานของมุมมองภาพความเป็นจริงผ่านเลนส์ของอุปกรณ์สื่อสาร เช่น สมาร์ทโฟน รวมเข้ากับโลกเสมือน ซึ่งมีจุดประสงค์เพื่อเพิ่มขีดความสามารถในการสื่อสารกับผู้ใช้งาน หรือทำให้สื่ออื่น ๆ มีความน่าสนใจมากยิ่งขึ้น โดยแบ่งได้เป็น 2 รูปแบบ ได้แก่ แบบใช้ภาพเป็นสัญลักษณ์ (Image Based AR) และแบบใช้ระบบพิกัด (Location based) โดยจะต้องมีตัวระบุตำแหน่ง (Marker) เพื่อทำหน้าที่เป็นตัวบอกพิกัดในการวิเคราะห์ข้อมูลในกรณีที่ใช้งานโปรแกรมเลื่อนอุปกรณ์รับภาพมาตรงกับสัญลักษณ์ที่ได้กำหนดไว้ โดยตัวแอปพลิเคชันจะมีขั้นตอนในการพัฒนาและองค์ประกอบที่สำคัญ ดังนี้
  - 6.1 ขั้นตอนพัฒนาแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้ เรื่องการทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น
    - 6.1.1 อุปกรณ์แสดงผล โดยผู้พัฒนาเลือกอุปกรณ์ที่ทำงานด้วยระบบปฏิบัติการแอนดรอยด์ เนื่องจากมีความยืดหยุ่นในการใช้งาน และยังเป็นระบบปฏิบัติการที่เป็น Open source ซึ่งไม่มีค่าใช้จ่ายหรือปัญหาเรื่องลิขสิทธิ์ในการใช้งาน
    - 6.1.2 Unity game engine ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ให้ในการพัฒนาแอปพลิเคชัน หรือเกมส์ที่รองรับรูปแบบการทำงานในสภาพแวดล้อมหรือ ทุกแพลตฟอร์ม



รูปที่ 4 หน้าจอโปรแกรม Unity game engine



6.1.3 Vuforia Augmented Reality SDK คือโปรแกรมเสริม (plug-in) ที่เข้ามาช่วยให้การพัฒนาแอปพลิเคชันด้านเทคโนโลยีความเป็นจริงเสมือน (Augmented Reality : AR) ได้มีขีดความสามารถที่มากขึ้นรองรับการทำงานทั้งแบบ 2 มิติ และแบบ 3 มิติ

6.1.4 Marker ซึ่งทำหน้าที่เป็นตัวระบุตำแหน่งพิกัดของข้อมูล โดยมีการกำหนดคุณลักษณะเด่นของ Marker แต่ละตัวแตกต่างกันเพื่อลดความซ้ำซ้อนของข้อมูล



รูปที่ 5 Marker

6.1.5 สื่อช่วยสอน ทั้งในรูปแบบเอกสารอิเล็กทรอนิกส์และสื่อเคลื่อนไหว โดยมีรายละเอียดแต่ละบทเรียนตามขอบเขตของการวิจัย โดยใช้เป็นสื่อที่จะนำมาเชื่อมโยงกับเทคโนโลยีความเป็นจริงเสมือน (Augmented Reality)

1.1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้น

ข้อที่ 7. จงหาค่าของ  $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{6y} 2x \cos(3y^2) dx dy$

วิธีทำ เราสามารถหาค่าปริพันธ์สองชั้นนี้ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{6y} 2x \cos(3y^2) dx dy &= \int_0^{\sqrt{3}} 2 \cos(3y^2) \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{6y} dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \cos(3y^2) (6y)^2 dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} 36y^2 \cos(3y^2) dy \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} 36y^2 \cos(3y^2) \frac{d(3y^2)}{6y^2} \\ &= 4 \left[ \sin(3y^2) \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 4 \left( \sin \left( 3 \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 \right) - \sin(0) \right) \\ &= 4 \left( \sin \left( \frac{3\pi}{2} \right) - \sin(0) \right) \\ &= 4(-1 - 0) \\ &= -4 \end{aligned}$$

รูปที่ 6 ตัวอย่างสื่อช่วยสอน

## 7. การทดสอบประสิทธิภาพของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

- 7.1 นำแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นที่สร้างขึ้นไปทดลองใช้กับนักศึกษาที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างครั้งที่ 1 จำนวน 3 คน เพื่อศึกษาปัญหาการใช้ชุดการสอน และนำคะแนนทดสอบมาหาค่าประสิทธิภาพแบบเดี่ยวของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ โดยใช้สัมประสิทธิ์ E1/E2 ครั้งที่ 1 ซึ่งผลการหาประสิทธิภาพได้เป็น 60/60
- 7.2 นำแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น มาปรับปรุงแก้ไขหลังจากได้ทำการทดลองครั้งที่ 1 แล้วนำไปทดลองใช้เป็นครั้งที่ 2 กับนักศึกษาที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 6 คน และนำคะแนนทดสอบมาหาค่าประสิทธิภาพแบบกลุ่มโดยใช้สัมประสิทธิ์ E1/E2 ครั้งที่ 2 ซึ่งผลการหาประสิทธิภาพได้เป็น 70/70
- 7.3 นำแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นมาปรับปรุงแก้ไขหลังจากได้ทำการทดลองครั้งที่ 3 กับนักศึกษาที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน เพื่อหาประสิทธิภาพของทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ภาคสนามโดยใช้สัมประสิทธิ์ E1/E2 ว่าเป็นไปตามเกณฑ์ 80/80 หรือไม่ ซึ่งผลการหาค่าประสิทธิภาพได้ 80.13/80.25 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด
- 7.4 นำคะแนนการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยโดยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นของนักศึกษากลุ่มทดลองครั้งที่ 3 มาคำนวณหาค่าดัชนีประสิทธิผล (Effectiveness Index : EI) มีค่าเท่ากับ 0.84

## การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

1. ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
2. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น จำนวน 1 ชุด มีจำนวน 56 ข้อ และหาคุณภาพของแบบทดสอบดังนี้
  - 2.1 หาค่าความตรงตามเนื้อหาของแบบทดสอบโดยให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่านช่วยพิจารณาโดยหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) และเลือกข้อที่มีค่าดัชนีระหว่าง 0.6-1.0 จำนวน 40 ข้อ
  - 2.2 นำแบบทดสอบไปทดสอบกับนักศึกษาซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน เพื่อหาค่าความยาก (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ โดยคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากและค่าอำนาจจำแนก ระหว่าง 0.2-0.8 ได้จำนวน 20 ข้อ

2.3. นำแบบทดสอบไปทดสอบกับนักศึกษาซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 20 คน เพื่อหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบโดยวิธี KR-20 ของคูเดอร์ริชาร์ดสัน ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.78

3. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไปใช้ในการทำการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนโดยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้และการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ เพื่อการเก็บข้อมูลคะแนนแล้วนำไปวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

### การสร้างแบบสอบถามความพึงพอใจและการนำไปใช้

1. ศึกษาเอกสารและวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความพึงพอใจ
2. นำผลที่ได้จากการศึกษาเอกสารเกี่ยวกับความพึงพอใจไปสร้างแบบสอบถาม (ฉบับร่าง) ให้สอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของการวิจัย โดยแบบสอบถามความพึงพอใจจะประกอบด้วยการวัดความพึงพอใจทั้งหมด 5 ด้าน ได้แก่ ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อบทเรียน ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อเนื้อหาของบทเรียน ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้ภาษาและการอธิบายวิธีการทำแบบฝึกทักษะแต่ละข้อ ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการออกแบบและการจัดรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และความพึงพอใจต่อแอปพลิเคชันที่นำมาใช้กับแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ มีข้อคำถามรวมกันทั้งสิ้น 40 ข้อและนำแบบสอบถามฉบับร่างไปให้ที่ปรึกษาโครงการตรวจสอบความตรงของเนื้อหาในขั้นตอนต่อไป
3. หากคุณภาพของแบบสอบถามความพึงพอใจต่อการใช้อุปกรณ์ซึ่งหมายถึงแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้เรื่องการทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยดำเนินการดังนี้
4. นำแบบสอบถามที่ได้รับการตรวจสอบจากที่ปรึกษาโครงการไปหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) โดยผ่านการตรวจสอบของผู้ทรงคุณวุฒิ 3 ท่าน
5. ทำการปรับปรุง แก้ไขแบบสอบถามความพึงพอใจโดยการตรวจสอบและปรับแก้ตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิเพื่อสร้างเป็นแบบสอบถามฉบับสมบูรณ์ ซึ่งได้ข้อคำถามทั้งสิ้น 26 ข้อ เพื่อนำไปใช้ในการวัดระดับความพึงพอใจ
6. วัดระดับความพึงใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ในการเรียนการสอนเรื่องการทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยใช้แบบสอบถามเป็นคำถามแบบประมาณค่า 5 ระดับ (Rating Scale) ประกอบด้วยระดับความพึงใจในด้านต่าง ๆ โดยมีเกณฑ์ของค่าคะแนนจากมากที่สุดไปอย่างน้อยที่สุดตามลำดับ กับนักศึกษากลุ่มตัวอย่างจำนวน 45 คน

### วิธีดำเนินการทดลอง

ผู้วิจัยดำเนินการทดลองดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. ผู้วิจัยทำการแบ่งกลุ่มนักศึกษากลุ่มทดลองออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ จำนวน 15 กลุ่ม โดยแต่ละกลุ่มจะมีนักศึกษา เก่ง 1 คน ปานกลาง 3 คน และอ่อน 1 คน โดยพิจารณาจากคะแนนการ

ทดสอบย่อยจากบทเรียนที่ผู้วิจัยได้เคยทำการทดสอบเก็บคะแนนไว้มาเป็นเกณฑ์ในการแยกความสามารถของนักศึกษา

2. ผู้วิจัยอธิบายวิธีการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น พร้อมแอฟพลีเคชันส่งเสริมการเรียนรู้ กับนักเรียนกลุ่มทดลอง เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการใช้แบบฝึกทักษะที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

3. กลุ่มควบคุมใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ผู้วิจัยใช้เวลาในการสอนทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มละ 3 คาบ ๆ ละ 50 นาที

### การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยนำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นไปทำการทดสอบกับนักศึกษาทั้ง 2 กลุ่ม หลังเรียน ด้วยตนเอง โดยใช้เวลาในการทดสอบ 60 นาที

2. ผู้วิจัยนำแบบสอบถามความพึงพอใจต่อการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ไปใช้ในเก็บข้อมูลสำหรับนักศึกษากลุ่มทดลองจำนวน 45 คนเพื่อนำข้อมูลไปวิเคราะห์

3. นำข้อมูลเกี่ยวกับระดับความพึงพอใจที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน โดยผู้วิจัยจะนำผลที่ได้มาสรุปเป็นความเรียง ซึ่งในการแปลผลค่าเฉลี่ยจากการตอบแบบสอบถามความพึงพอใจนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ผู้วิจัยกำหนดไว้ดังนี้

ค่าเฉลี่ย 4.50 - 5.00 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษา อยู่ในระดับมากที่สุด

ค่าเฉลี่ย 3.50 - 4.49 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษาที่ อยู่ในระดับมาก

ค่าเฉลี่ย 2.50 - 3.49 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษาที่ อยู่ในระดับปานกลาง

ค่าเฉลี่ย 1.50 - 2.49 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษา อยู่ในระดับน้อย

ค่าเฉลี่ย 1.00 - 1.49 หมายถึง ความพึงพอใจนักศึกษา อยู่ในระดับน้อยที่สุด

### สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยทำการทดสอบค่าเฉลี่ยของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมโดยสถิติ t-test แบบกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มเป็นอิสระจากกัน (Independent Sample t -Test)

## บทที่ 4

### ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในบทนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล โดยจำแนกตามวัตถุประสงค์ดังนี้ ดังนี้

**การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระหว่างการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ**

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระหว่างการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ได้ผลดังตารางต่อไปนี้

**ตารางที่ 1** การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษา ก่อนเรียนด้วยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ด้วยสถิติ Independent Sample t-test

นักศึกษา	n	$\bar{x}$	S.D.	t	P-Value
กลุ่มควบคุม	45	8.33	1.41421	-0.846	0.420
กลุ่มทดลอง	45	8.60	1.57249		

จากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่า นักศึกษา ก่อนเรียนด้วยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่แสดงด้วยค่าเฉลี่ยที่ใกล้เคียงกัน ทำให้มีนัยสำคัญทางสถิติไม่ต่างกัน

**ตารางที่ 2** การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษา หลังเรียนด้วยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ด้วยสถิติ Independent Sample t-test

นักศึกษา	n	$\bar{x}$	S.D.	t	P-Value
กลุ่มควบคุม	45	10.80	2.06265	-13.166*	0.025
กลุ่มทดลอง	45	15.73	1.73654		

จากตารางที่ 2 จะเห็นได้ว่า นักศึกษา หลังเรียนด้วยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยกลุ่มทดลองมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 15.73 และกลุ่มควบคุมมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 10.80

**ตารางที่ 3** การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษากลุ่มควบคุม ก่อนเรียนและหลังเรียน โดยใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ด้วยสถิติ Dependent Sample t-test

การเปรียบเทียบ	n	$\bar{x}$	S.D.	t	P-Value
ก่อนเรียน	45	8.33	1.41421	-13.008***	.000
หลังเรียน	45	10.80	2.06265		

จากตารางที่ 3 จะเห็นได้ว่า นักศึกษากลุ่มควบคุมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .001

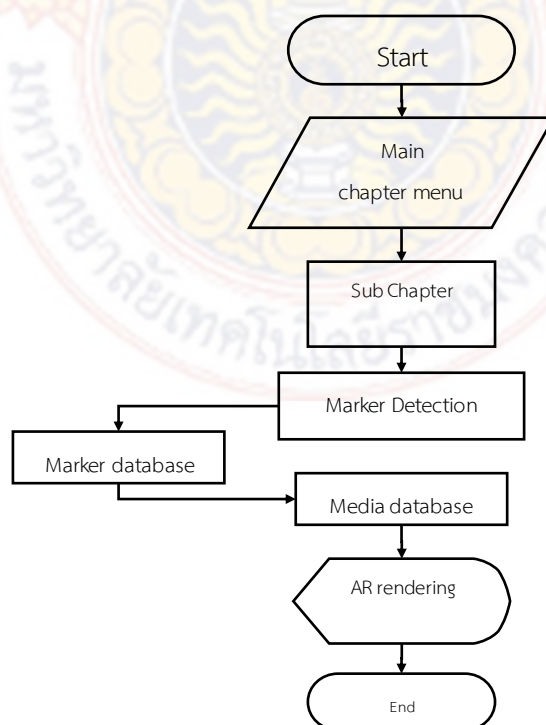
**ตารางที่ 4** การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษากลุ่มควบคุมก่อนเรียนและหลังเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ ด้วยสถิติ Dependent Sample t-test

การเปรียบเทียบ	n	$\bar{x}$	S.D.	t	P-Value
ก่อนเรียน	45	8.60	1.57249	-32.195***	.000
หลังเรียน	45	15.75	1.43654		

จากตารางที่ 4 จะเห็นได้ว่า นักศึกษากลุ่มควบคุมมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .001

**การสร้างสื่อการเรียนรู้ในรูปแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น**

1. สื่อการเรียนรู้ในรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น จะมีขั้นตอนการทำงานร่วมกับแอปพลิเคชันส่งเสริมการเรียนรู้ ดังนี้



2. เริ่มต้นการทำงานของแอปพลิเคชันโปรแกรมจะแสดงหน้าจอตอนรับผู้ใช้งาน สามารถเข้าสู่บทเรียนหรือดูข้อมูลเกี่ยวกับผู้สอนได้จากหน้าแรกของแอปพลิเคชัน ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 หน้าจอตอนรับของแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

3. เมื่อผู้เรียนเลือกเมนูเข้าสู่บทเรียนแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น จะแสดงรายละเอียดของบทเรียนทั้งหมดซึ่งประกอบไปด้วย 4 หัวข้อดังรูปที่ 8



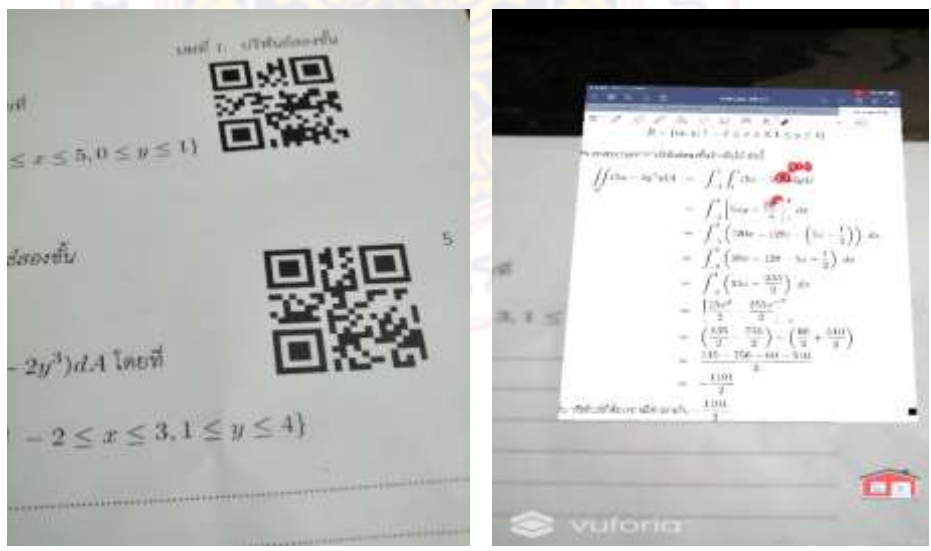
รูปที่ 8 เมนูหลักแสดงบทเรียนภายในแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

4. กรณีที่ผู้เรียนหรือผู้ใช้งานแอปพลิเคชันเลือกเข้าสู่บทเรียนย่อย แอปพลิเคชันจะแสดงรายละเอียดของเนื้อหาประจำบทเรียนพร้อมทั้งปุ่มการทำงานต่างๆ ซึ่งประกอบไปด้วย ปุ่มกลับไปยังหน้าจอแสดงผลหลัก ปุ่มเปิดเอกสารเพิ่มเติมรูปแบบ PDF ปุ่มแสดงผลไปรูปแบบ AR และปุ่มที่เชื่อมโยงไปยังเนื้อหาเพิ่มเติมที่อยู่บน YouTube



รูปที่ 9 ตัวอย่างของแอปพลิเคชัน เมื่อเข้าสู่บทเรียน

5. หากผู้เรียนเลือกปุ่มแสดงผลในรูปแบบ AR แอปพลิเคชันจะเปิดกล้องถ่ายภาพของอุปกรณ์แสดงผลหรือโทรศัพท์มือถือเครื่องนั้นๆ เพื่อเริ่มทำการตรวจสอบหาตัวระบุตำแหน่ง (Marker) และเมื่อตรวจพบก็จะเข้าสู่ขั้นตอนการแสดงผลสื่อช่วยสอน ดังรูปที่ 10



รูปที่ 10 ผลลัพธ์ที่ได้จากการแสดงผลในรูปแบบ AR



ระดับความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลิตีเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

การวัดระดับความพึงพอใจจำแนกเป็น 5 ด้าน ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 5 ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อบทนำของบทเรียน

ประเด็น	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	ความหมาย
ความน่าสนใจ	4.77	0.42	มากที่สุด
วัตถุประสงค์	4.77	0.42	มากที่สุด
<b>รวม</b>	<b>4.77</b>	<b>0.42</b>	<b>มากที่สุด</b>

จากตารางที่ 5 เราพบว่าความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อบทนำของบทเรียน อยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.77$ , S.D. = 0.42) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของความน่าสนใจ และวัตถุประสงค์ มีค่าเฉลี่ยเท่ากันอยู่ที่ 4.77 อยู่ในระดับมากที่สุด

ตารางที่ 6 ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อเนื้อหาของบทเรียน

ประเด็น	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	ความหมาย
เนื้อหา มีความชัดเจนถูกต้องน่าเชื่อถือ	4.62	0.48	มากที่สุด
ข้อมูลมีความทันสมัยน่าสนใจ	4.64	0.48	มากที่สุด
การจัดลำดับเนื้อหาเป็นขั้นตอนและต่อเนื่อง อ่านแล้วเข้าใจง่าย	4.68	0.47	มากที่สุด
จัดรูปแบบหน้าจอ ได้แก่ รูปภาพ ตัวอักษรและสี มีความเหมาะสม	4.64	0.48	มากที่สุด
ความเป็นระเบียบของการแสดงวิธีทำ และการคำนวณ	4.64	0.48	มากที่สุด
การเรียงลำดับความยากง่ายของโจทย์ในแบบฝึกทักษะ	4.48	0.58	มาก
เนื้อที่นำเสนอมีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในวิชาอื่น ๆ ต่อไป	4.51	0.58	มากที่สุด
ตัวอย่างที่นำมาประกอบการนำเสนอมีความสมบูรณ์และเพียงพอต่อการทำความเข้าใจ	4.66	0.47	มากที่สุด

รวม	4.61	0.50	มากที่สุด
-----	------	------	-----------

จากตารางที่ 6 เราพบว่าความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อเนื้อหาของบทเรียน อยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.61$ , S.D.= 0.50) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของการจัดลำดับเนื้อหาเป็นขั้นตอน และต่อเนื่อง อ่านแล้วเข้าใจง่ายมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.68 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับแรก รองลงมา เป็นประเด็นของตัวอย่างที่นำมาประกอบการนำเสนอมีความสมบูรณ์และเพียงพอต่อการทำความเข้าใจ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.66 อยู่ในระดับมากที่สุด และประเด็นของการเรียงลำดับความยากง่ายของโจทย์ ในแบบฝึกทักษะ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.48 อยู่ในระดับมากเป็นอันดับสุดท้าย

**ตารางที่ 7** ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้ภาษาและการอธิบายวิธีการทำแบบฝึกทักษะแต่ละข้อ

ประเด็น	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	ความหมาย
ใช้ภาษาถูกต้อง เหมาะสม เข้าใจง่ายกับ วัยผู้เรียน	4.37	0.49	มาก
สื่อความหมายได้ชัดเจนเหมาะสมกับ บริบทของเนื้อหา	4.66	0.47	มากที่สุด
การอธิบายมีความถูกต้องและกระชับ	4.64	0.82	มากที่สุด
รวม	4.56	0.59	มากที่สุด

จากตารางที่ 7 เราพบว่าความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้ภาษาและการอธิบายวิธีการทำแบบฝึกทักษะแต่ละข้อ อยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.56$ , S.D.= 0.59) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของการสื่อความหมายได้ชัดเจนเหมาะสมกับบริบทของเนื้อหา มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.66 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับแรก รองลงมาเป็นประเด็นของการอธิบายมีความถูกต้องและกระชับ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.64 อยู่ในระดับมากที่สุด และประเด็นของการใช้ภาษาถูกต้อง เหมาะสม เข้าใจง่ายกับวัยผู้เรียน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.37 อยู่ในระดับมากเป็นอันดับสุดท้าย

**ตารางที่ 8** ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการออกแบบและการจัดรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

ประเด็น	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	ความหมาย
หน้าแอปพลิเคชันมีความสวยงาม เหมาะสม น่าสนใจ	4.46	0.62	มาก
รูปแบบตัวอักษรอ่านได้ง่ายและสวยงาม	4.64	0.48	มากที่สุด
รูปภาพที่ใช้มีความชัดเจนและสอดคล้อง	4.57	0.58	มากที่สุด

กันกับภาษาที่บรรยาย			
สีของพื้นหลังที่ใช้สวยงามและสบายตา	4.44	0.65	มาก
ความชัดเจนของรูปภาพที่นำมาใช้ในการประกอบกรคำนวณ	4.62	0.57	มากที่สุด
<b>รวม</b>	<b>4.55</b>	<b>0.58</b>	<b>มากที่สุด</b>

จากตารางที่ 8 เราพบว่าความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการออกแบบและการจัดรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ อยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.55$ , S.D.= 0.58) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของรูปแบบตัวอักษรอ่านได้ง่ายและสวยงาม มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.64 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับแรก รองลงมาประเด็นของความชัดเจนของรูปภาพที่นำมาใช้ในการประกอบกรคำนวณ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.62 อยู่ในระดับมากที่สุด และประเด็นของสีของพื้นหลังที่ใช้สวยงามและสบายตา มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.44 อยู่ในระดับมากเป็นอันดับสุดท้าย

**ตารางที่ 9** ความพึงพอใจต่อแอปพลิเคชันที่นำมาใช้กับแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

ประเด็น	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน	ความหมาย
ออกแบบหน้าจอเหมาะสม ง่ายต่อใช้ สัดส่วนเหมาะสมสวยงาม	4.48	0.66	มาก
ขนาด สีตัวอักษร ชัดเจน สวยงาม อ่าน ง่ายเหมาะสมกับผู้เรียน	4.71	0.61	มากที่สุด
ภาพกราฟิกเหมาะสมชัดเจนสอดคล้อง กับเนื้อหา	4.55	0.72	มากที่สุด
คุณภาพการใช้เสียงประกอบบทเรียน เหมาะสม ชัดเจนน่าสนใจ	4.44	0.61	มาก
ความสะดวกในการเข้าถึงแอปพลิเคชันที่ จะนำมาใช้กับแบบฝึกทักษะ	4.31	0.86	มาก
ความครอบคลุมในการรองรับกับ ระบบปฏิบัติการต่าง ๆ	4.35	0.70	มาก
มีปุ่มปฏิบัติการที่ทำให้เข้าใจการใช้ แอปพลิเคชันได้ง่าย	4.48	0.58	มาก
ท่านมีความพึงพอใจในภาพรวมต่อ แอปพลิเคชัน จะนำมาใช้กับแบบฝึก ทักษะอยู่ในระดับใด	4.40	0.57	มาก

รวม	4.46	0.66	มาก
<p>จากตารางที่ 9 เราพบว่าความพึงพอใจต่อแอปพลิเคชันที่นำมาใช้กับแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตดเรียลลิตี้ อยู่ในระดับมาก (<math>\bar{x} = 4.46, S.D. = 0.669</math>) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของขนาดสื่ตัวอักษร ชัดเจน สวยงาม อ่านง่ายเหมาะสมกับผู้เรียน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.71 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับแรก รองลงมาประเด็นของภาพกราฟิกเหมาะสมชัดเจนสอดคล้องกับเนื้อหา มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.55 อยู่ในระดับมากที่สุด และประเด็นของความสะดวกในการเข้าถึงแอปพลิเคชันที่จะนำมาใช้กับแบบฝึกทักษะ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.31 อยู่ในระดับมากเป็นอันดับสุดท้าย</p>			



## บทที่ 5

### สรุป อภิปรายผล ข้อเสนอแนะ

#### วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระหว่างการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ
2. เพื่อสร้างสื่อการเรียนรู้ในรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ พร้อมทั้งหาประสิทธิภาพของแบบฝึกทักษะ
3. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

#### ขอบเขตของการวิจัย

ประชากร คือ นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย สงขลา ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 222 คน

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย สงขลา ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2562 จำนวน 2 กลุ่มเรียน กลุ่มละ 45 คน เลือกตัวอย่างโดยการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Sampling) และเลือกให้วิธีการทดลองให้กับกลุ่มตัวอย่างโดยการจับฉลาก

ขอบเขตด้านเนื้อหา ในการวิจัยครั้งนี้ใช้เนื้อหาเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

#### ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรต้น คือ การใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ

ตัวแปรตาม คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเลือกศึกษาในสองประเด็นคือ

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นระหว่างกลุ่มนักศึกษาที่ใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับกลุ่มของนักศึกษาที่ใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ
2. สื่อการเรียนรู้ในรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และประสิทธิภาพของแบบฝึกทักษะ
3. ศึกษาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

## สมมุติฐานการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่เกิดจากการทำแบบฝึกทักษะของนักศึกษา เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น โดยใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ มีความแตกต่างกับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ และนักศึกษาที่ใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ มีความพอใจอยู่ในระดับมาก

## สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นระหว่างแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้กับการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติ ผู้วิจัยพบว่า

1. นักศึกษาหลังเรียนด้วยการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
2. การวิจัยได้นำเสนอเกี่ยวกับการนำเนื้อหาที่เป็นส่วนหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นศาสตร์ที่ใช้ในการพัฒนาระบบการคิด การวิเคราะห์ การแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ มาผนวกร่วมเข้ากับเทคโนโลยี ความจริงเสมือน (Augmented Reality: AR) ที่จะเป็นตัวช่วยในการนำเสนอข้อมูลแก่นักศึกษาในการทำแบบฝึกทักษะผ่านรูปแบบของกราฟ 2D และ 3D พร้อมด้วยวีดีโอให้คำแนะนำหรือวีดีโอเฉลยแบบฝึกหัดทำให้รูปแบบการเรียนรู้มีความน่าสนใจมากยิ่งขึ้น โดยแอปพลิเคชันเพื่อการเรียนรู้ที่ถูกพัฒนาเพื่อมาใช้ควบคู่กับแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นนั้น ได้ถูกพัฒนาโดยให้ความสำคัญไปยังความสามารถของแอปพลิเคชันในด้านการทำงานร่วมกันกับอุปกรณ์ประเภทสมาร์ตดีไวซ์ ซึ่งทำให้นักศึกษาสามารถเข้าถึงได้อย่างสะดวก เนื่องจากนักศึกษาได้มีการใช้งานสมาร์ตโฟนในชีวิตประจำวันอยู่แล้วเป็นปกติ นักศึกษาจึงสามารถทำแบบฝึกทักษะและนับเป็นการทบทวนบทเรียนด้วยตนเองได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทั้งนี้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้มีค่าประสิทธิภาพเท่ากับ 80.13/80.25 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดที่ 80/80
3. ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อบทเรียน อยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.77$ , S.D.= 0.42) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของความน่าสนใจ และวัตถุประสงค์มีค่าเฉลี่ยเท่ากันอยู่ที่ 4.77 อยู่ในระดับมากที่สุด ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อเนื้อหาของบทเรียน อยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.61$ , S.D.= 0.50) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของการจัดลำดับเนื้อหาเป็นขั้นตอนและต่อเนื่อง อ่านแล้วเข้าใจง่ายมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.68 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับแรก รองลงมาประเด็นของตัวอย่างที่นำมาประกอบการนำเสนอมีความสมบูรณ์และเพียงพอต่อการทำความเข้าใจ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.66 อยู่ในระดับมากที่สุด และประเด็นของการเรียงลำดับความยากง่ายของโจทย์ในแบบฝึกทักษะ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.48 อยู่ในระดับมากที่สุดท้ายความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้ภาษาและการอธิบายวิธีการทำแบบฝึกทักษะแต่ละข้อ อยู่ใน

ระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.56, S.D. = 0.59$ ) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของการสื่อความหมายได้ชัดเจนเหมาะสมกับบริบทของเนื้อหา มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.66 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับแรก รองลงมาประเด็นของการอธิบายมีความถูกต้องและกระชับ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.64 อยู่ในระดับมากที่สุด และประเด็นของการใช้ภาษาถูกต้อง เหมาะสม เข้าใจง่ายกับวัยผู้เรียน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.37 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับสุดท้าย ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการออกแบบและการจัดรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ อยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.55, S.D. = 0.58$ ) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของรูปแบบตัวอักษรอ่านได้ง่ายและสวยงาม มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.64 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับแรก รองลงมาประเด็นของความชัดเจนของรูปภาพที่นำมาใช้ในการประกอบการคำนวณ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.62 อยู่ในระดับมากที่สุด และประเด็นของสีของพื้นหลังที่ใช้สวยงามและสบายตา มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.44 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับสุดท้าย ความพึงพอใจต่อแอปพลิเคชันที่นำมาใช้กับแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ อยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.46, S.D. = 0.669$ ) เมื่อพิจารณาเป็นรายข้อพบว่า ประเด็นของขนาด สี ตัวอักษร ชัดเจน สวยงาม อ่านง่ายเหมาะสมกับผู้เรียน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.71 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับแรก รองลงมาประเด็นของภาพกราฟิกเหมาะสมชัดเจนสอดคล้องกับเนื้อหา มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.55 อยู่ในระดับมากที่สุด และประเด็นของความสะดวกในการเข้าถึงแอปพลิเคชันที่จะนำมาใช้กับแบบฝึกทักษะ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 4.31 อยู่ในระดับมากที่สุดเป็นอันดับสุดท้าย และความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ นักศึกษามีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.56, S.D. = 0.63$ )

### อภิปรายผล

1. จากการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น ระหว่างแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และแบบฝึกทักษะแบบปกติ จะเห็นว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาหลังเรียน ด้วยการ ใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ และการใช้แบบฝึกทักษะแบบปกติมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ เสาวภา กลิ่นสูงเนิน (2558) ได้ศึกษาการพัฒนาสื่อเทคโนโลยีเสมือนจริง เรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนด้วยสื่อเทคโนโลยีเสมือนจริง เรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นนับเป็นแบบฝึกทักษะในรูปแบบใหม่ ซึ่งถือเป็นนวัตกรรมทางการเรียนที่ใช้เทคโนโลยีความจริงเสมือน (Augmented Reality: AR) เข้ามาช่วยในการยกระดับของแบบฝึกทักษะที่อยู่ในรูปแบบของเอกสารโดยทั่วไป ให้อยู่ในรูปแบบที่ใช้งานได้ง่าย โดยไม่ยึดติดกับสถานที่หรือเวลา

เปรียบเสมือนมีอาจารย์คอยให้คำแนะนำและชี้แนวทางในการทำแบบฝึกทักษะตลอดการใช้งาน อีกทั้งเนื้อหาในแบบฝึกทักษะยังสามารถปรับปรุงให้มีความหลากหลายเป็นปัจจุบันได้ง่ายกว่าแบบฝึกทักษะที่เป็นเอกสารโดยทั่วไป ทั้งนี้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้มีค่าประสิทธิภาพเท่ากับ  $80.13/80.25$  ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดที่  $80/80$  ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ เสาวภา กลิ่นสูงเนิน (2558) คุณภาพด้านเทคนิคการผลิตสื่อเทคโนโลยีเสมือนจริง เรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 อยู่ในระดับดีมาก ( $\bar{x} = 4.88$ ) ประสิทธิภาพของบทเรียนมีประสิทธิภาพ  $E_1/E_2$  เท่ากับ  $89.67/87.31$  ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนดไม่ต่ำกว่า  $80/80$

3. การวิจัยเรื่องการศึกษาความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ นักศึกษามีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด ( $\bar{x} = 4.56$ , S.D. = 0.63) ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ เอกรัฐ หล่อพิเชียร (2559) ซึ่งได้ศึกษาการใช้สื่อการเรียนรู้อัจฉริยะเสริม (Augmented Reality) เรื่องโปรโตคอล TCP/IP เพื่อเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษา วิชาการสื่อสารข้อมูลและเครือข่ายคอมพิวเตอร์ สาขาเทคโนโลยีสารสนเทศการศึกษาคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี พบว่าระดับความพึงพอใจของผู้เรียนต่อการใช้สื่อการเรียนรู้อัจฉริยะมีค่าเฉลี่ยโดยรวมทั้งหมดอยู่ในระดับมากที่สุด

### ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

1. แบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เป็นแบบฝึกทักษะที่ส่งเสริมประสิทธิภาพทางการเรียนของนักศึกษาให้สูงขึ้น อีกทั้งยังเป็นแบบฝึกทักษะรูปแบบใหม่ที่นักศึกษายังไม่คุ้นชินกับวิธีการใช้ ผู้สอนควรเสริมความรู้ด้านเทคนิคการใช้งานแบบฝึกทักษะและแอปพลิเคชันควบคู่กันไป เพื่อกระตุ้นการเรียนรู้ของผู้เรียน ส่งผลให้ผู้เรียนเกิดการพัฒนารับรู้และสร้างเจตคติที่ดีในด้านการเรียนการสอน

2. อาจารย์ผู้สอนควรจัดรูปแบบการเรียนการสอนที่หลากหลายให้เหมาะสมกับนักศึกษาที่มีพื้นฐานที่แตกต่างกัน ทั้งด้านความรู้พื้นฐาน กระบวนการเรียนรู้ หรือแม้กระทั่งปัจจัยในด้านอุปกรณ์พื้นฐานที่จะใช้กับเทคโนโลยี AR ซึ่งจะส่งผลให้นักศึกษาเกิดความสนใจที่จะเรียนรู้อย่างต่อเนื่อง

### ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นผ่านแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับรูปแบบของแบบฝึกทักษะหรือสื่อการสอนแบบอื่น ๆ

2. ควรมีการพัฒนาแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ กับเนื้อหาในหัวข้อหรือวิชาอื่น ๆ เพื่อประโยชน์แก่นักศึกษาโดยทั่วกัน



## บรรณานุกรม

- [1] เกวลี ผาใต้, พิเชนทร์ จันทร์ป๋ม และ อภิวัฒน์ วัฒนะสุระ. (2561). “สื่อการเรียนรู้ด้วยเทคโนโลยี มิติเสมือนจริง เรื่อง คำศัพท์ภาษาอังกฤษสัตว์โลกน่ารัก”, วารสารโครงการวิทยาการ คอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ. 23-28.
- [2] ชนาธิป พรกุล. (2554). การออกแบบการสอน. พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่ง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- [3] นริศรา กาฬมาตย์, ชนาธร รูปพุดชา. (2544). “การประยุกต์ใช้เทคโนโลยีออกเมนต์เรียลลิตี้ สำหรับหนังสือการ์ตูน 3 มิติ เรื่องพระมหาชนก”, สารนิพนธ์วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขา เทคโนโลยีสารสนเทศ ภาควิชาคณิตศาสตร์ สถิติและคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี.
- [4] เสาวภา กลิ่นสูงเนิน, สมเกียรติ ดันตวิวงศ์วานิช และศรวิรัตน์ เพ็ชรแสงศรี (2558). “การพัฒนาสื่อ เทคโนโลยีเสมือนจริง เรื่องหลักการทำงานของคอมพิวเตอร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปี ที่ 1”, วารสารครุศาสตร์อุตสาหกรรม ปีที่ 14 ฉบับที่ 3 เดือนกันยายน-ธันวาคม 2558.
- [5] ศุขมา แสนปากดี. (2557). “การประยุกต์ใช้เทคโนโลยีเสมือนจริงในบอร์ดประชาสัมพันธ์ประชาคม เศรษฐกิจอาเซียน”, วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี:การประชุมวิชาการ มหาสารคาม วิจัย ครั้งที่10, 256-264. 288-295.
- [6] เอกรัฐ หล่อพิเชียร. (2560). “การใช้สื่อการเรียนรู้ความเป็นจริงเสริม (Augmented Reality) เรื่อง โปรโตคอล TCP/IP เพื่อเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษา วิชาการสื่อสารข้อมูล และ เครือข่ายคอมพิวเตอร์ สาขาเทคโนโลยีสารสนเทศการศึกษาคณะครุศาสตร์ อุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล ธัญบุรี”, การประชุมวิชาการระดับชาติ มหาวิทยาลัย เทคโนโลยีราชมงคล ครั้งที่ 9 (RMUTNC 9th). 1116-1122.

ภาคผนวก ก

ตัวอย่างแบบสอบถามความพึงพอใจต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้



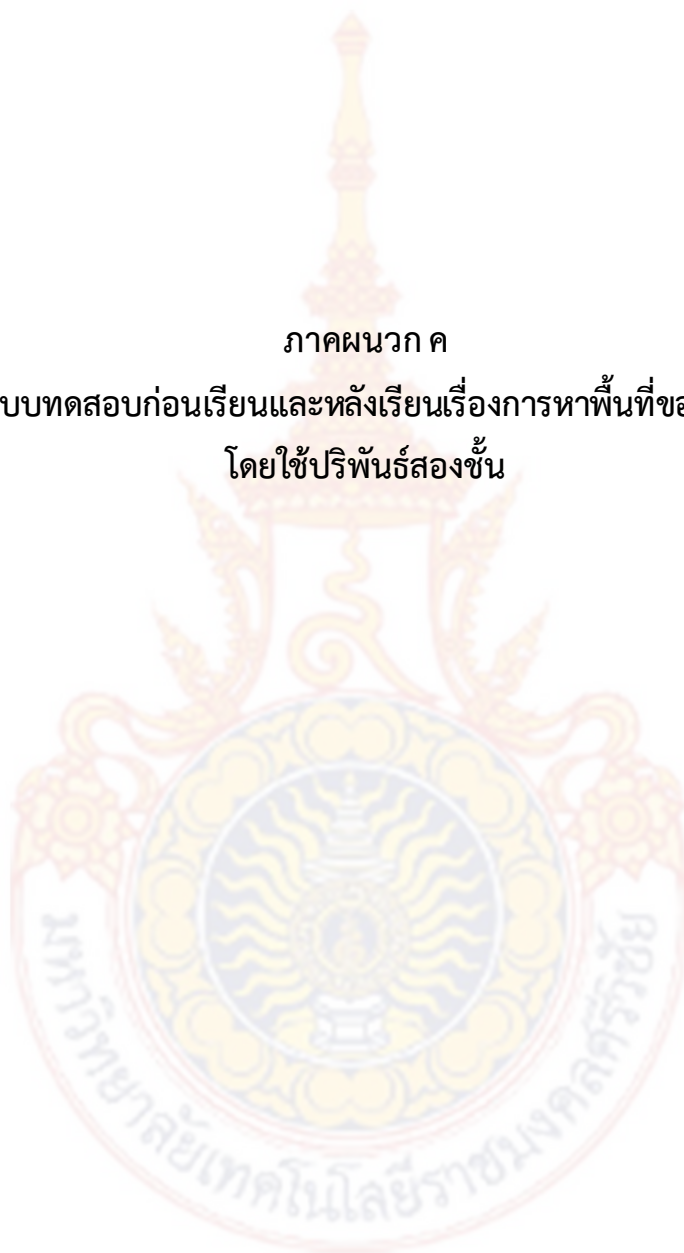
ภาคผนวก ข

ตัวอย่างแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้



ภาคผนวก ค

ตัวอย่างแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนเรื่องการทำพื้นที่ของบริเวณใด ๆ  
โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น



ภาคผนวก ง

ตัวอย่างเฉลยแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้





## แบบสอบถามความพึงพอใจต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

### ตอนที่ 1 ข้อมูลทั่วไปของผู้ตอบแบบสอบถาม

1. เพศ  ชาย  หญิง
2. ระดับการศึกษา (ปริญญาตรี)  ชั้นปีที่ 1  ชั้นปีที่ 2  ชั้นปีที่ 3  ชั้นปีที่ 4  
 สูงกว่าชั้นปีที่ 4
3. สาขาวิชา  วิศวกรรมโทรคมนาคม  วิศวกรรมอุตสาหการ  วิศวกรรมการผลิต  
 วิศวกรรมเครื่องกล  วิศวกรรมโยธา  วิศวกรรมไฟฟ้า
4. รูปแบบของการศึกษาก่อนเข้าสู่ระดับอุดมศึกษา  
 สายสามัญ (มัธยมศึกษา)  สายอาชีพ (ปวช., ปวส.)

### ตอนที่ 2 ความพึงพอใจของผู้เรียนที่มีต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

โปรดแสดงความคิดเห็นของท่านให้ตรงกับระดับความพึงพอใจ ซึ่งกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนของแบบประเมินเป็น 5 ระดับ ดังนี้

ระดับ 1 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับ “น้อยที่สุด”

ระดับ 2 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับ “น้อย”

ระดับ 3 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับ “ปานกลาง”

ระดับ 4 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับ “มาก”

ระดับ 5 หมายถึง ความพึงพอใจอยู่ในระดับ “มากที่สุด”

ประเด็นวัดความพึงพอใจ	ดีมาก (5)	ดี (4)	ปานกลาง (3)	น้อย (2)	น้อยที่สุด (1)
<b>1. ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อหน้าของบทเรียน</b>					
ความน่าสนใจ					
วัตถุประสงค์					
<b>2. ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อเนื้อหาของบทเรียน</b>					
เนื้อหามีความชัดเจนถูกต้องน่าเชื่อถือ					
ข้อมูลมีความทันสมัยน่าสนใจ					

ประเด็นวัดความพึงพอใจ	ดีมาก (5)	ดี (4)	ปานกลาง (3)	น้อย (2)	น้อยที่สุด (1)
การจัดลำดับเนื้อหาเป็นขั้นตอนและต่อเนื่อง อ่านแล้วเข้าใจง่าย					
จัดรูปแบบหน้าจอ ได้แก่ รูปภาพ ตัวอักษรและสี มีความเหมาะสม					
ความเป็นระเบียบของการแสดงวิธีทำและการคำนวณ					
การเรียงลำดับความยากง่ายของโจทย์ในแบบฝึกทักษะ					
เนื้อหาที่นำเสนอมีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในวิชาอื่น ๆ ต่อไป					
ตัวอย่างที่นำมาประกอบการนำเสนอมีความสมบูรณ์และเพียงพอต่อการทำความเข้าใจ					
<b>3. ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการใช้ภาษาและการอธิบายวิธีการทำแบบฝึกทักษะแต่ละข้อ</b>					
ใช้ภาษาถูกต้อง เหมาะสม เข้าใจง่ายกับวัยของผู้เรียน					
สื่อความหมายได้ชัดเจนเหมาะสมกับบริบทของเนื้อหา					
การอธิบายมีความถูกต้องและกระชับ					
<b>4. ความพึงพอใจของนักศึกษาที่มีต่อการออกแบบและการจัดรูปแบบของแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้</b>					
หน้าแอปพลิเคชันมีความสวยงามเหมาะสม น่าสนใจ					
รูปแบบตัวอักษรอ่านได้ง่ายและสวยงาม					
รูปภาพที่ใช้มีความชัดเจนและสอดคล้องกันกับภาษาที่บรรยาย					
สีของพื้นหลังที่ใช้สวยงามและสบายตา					
ความชัดเจนของรูปภาพที่นำมาใช้ในการประกอบการคำนวณ					
<b>5. ความพึงพอใจต่อแอปพลิเคชันที่นำมาใช้กับแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้</b>					
ออกแบบหน้าจอเหมาะสม ง่ายต่อใช้ สัดส่วนเหมาะสมสวยงาม					
ขนาดสี ตัวอักษร ชัดเจน สวยงาม อ่านง่ายเหมาะสมกับผู้เรียน					
ภาพกราฟิกเหมาะสม ชัดเจน สอดคล้องกับเนื้อหา					
คุณภาพการใช้เสียงประกอบบทเรียนเหมาะสม ชัดเจนน่าสนใจ					
ความสะดวกในการเข้าถึงแอปพลิเคชันที่จะนำมาใช้กับแบบฝึกทักษะ					
ความครอบคลุมในการรองรับกับระบบปฏิบัติการต่าง ๆ					
มีปุ่มปฏิบัติการที่ทำให้เข้าใจการใช้แอปพลิเคชันได้ง่าย					



ประเด็นวัดความพึงพอใจ	ดีมาก (5)	ดี (4)	ปานกลาง (3)	น้อย (2)	น้อยที่สุด (1)
ท่านมีความพึงพอใจในภาพรวมต่อแอปพลิเคชันอยู่ในระดับใด					

### ตอนที่ 3 ความคิดเห็น/ข้อเสนอแนะ

ความคิดเห็นต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

.....

.....

.....

ข้อเสนอแนะต่อแบบฝึกทักษะแบบออกเมนต์เตด เรียลลิตี้

.....

.....

.....

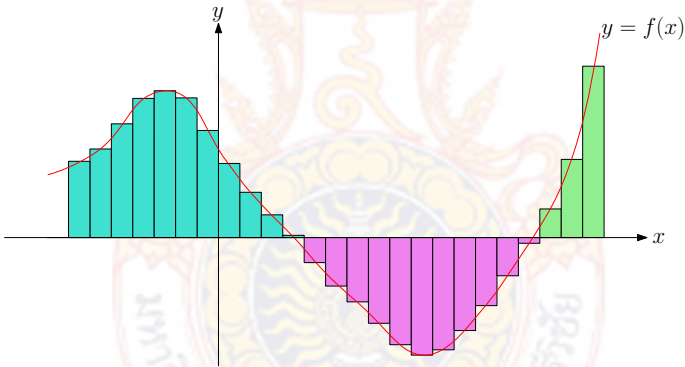
ขอขอบพระคุณที่ให้ความร่วมมือ





# แบบฝึกทักษะ

การหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น



วีระชัย ท่าดี และ เวคิน หนูน่าวงศ์

---

# คำนำ

---

การเรียนวิชาแคลคูลัสถือเป็นการฝึกทักษะทางด้าน การวิเคราะห์ และการ คำนวณ ที่ จำเป็นอย่างยิ่ง สำหรับนักศึกษาในระดับอุดมศึกษาในคณะที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์และ เทคโนโลยี ซึ่งในความเป็นจริงแล้วการเรียนวิชาแคลคูลัสให้ได้ดีนั้น ผู้เรียนจะต้องมีพื้นฐาน ทางด้านวิชาคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษามาแล้วในระดับหนึ่ง แล้วค่อยนำความรู้ที่มีนั้น มาแต่ต่อยอดกับวิชาแคลคูลัสและนำไปผสมผสานกับวิชาคำนวณหลาย ๆ วิชาในสาขาวิชาที่ นักศึกษาเลือกเรียน ซึ่งหากเป็นเช่นนั้นได้ก็จะทำให้นักศึกษาเข้าใจในวิชาแคลคูลัสมากยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยเป็นหนึ่งในกลุ่มของคณาจารย์ที่ทำการสอนวิชาแคลคูลัสมากกว่า 9 ปี ซึ่งตลอด เวลาที่ผ่านมาในช่วงชีวิตการสอนพบว่า จากอดีตจนถึงปัจจุบันพื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์ ที่นักศึกษาควรมีมาก่อนที่เข้าสู่ห้องเรียน แคลคูลัสนั้น นับวันยิ่งน้อยลง ซึ่งผู้วิจัย จะไม่ พยายามมองย้อนไปว่าสาเหตุเกิดจากอะไร แต่ผู้วิจัยจะพยายามพัฒนารูปแบบการสอนของ ผู้วิจัยกับนักศึกษาในปัจจุบันให้ออกมาดีและ เหมาะสมที่สุดสำหรับผู้เรียน ซึ่งรูปแบบของ การสอนที่ผู้วิจัยต้องการพัฒนาด้านหนึ่งคือการสร้างสื่อการเรียนการสอนที่ น่าสนใจและ พัฒนาการคิดวิเคราะห์ของผู้เรียนให้ได้มากที่สุด

แบบฝึกหัดออกเมนต์เตด เรียลลิตี้ เรื่องการหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น นับเป็นสื่อการเรียนการสอนรูปแบบใหม่ขั้นหนึ่งที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นมาเพื่อให้นักศึกษาได้ฝึกทำแบบฝึกทักษะ ที่มีรูปแบบต่างไปจากเดิม กล่าวคือเล่มแบบฝึกทักษะนี้จะไม่เพียงแค่บรรจุโจทย์และเฉลยคำตอบสุดท้ายไว้เหมือนแบบฝึกทักษะ โดยทั่วไป แต่ยังมีการสร้างเฉลยแบบฝึกทักษะในรูปแบบของวีดีโอพร้อมคำบรรยายและนำเสนอกราฟ ในรูปแบบของสามมิติผ่านแอปพลิเคชันในสมาร์ตโฟนของนักศึกษา เปรียบเสมือนว่าผู้เรียนมาสามารถทำแบบฝึกทักษะโดยมีอาจารย์ผู้สอนคอยให้คำแนะนำในส่วนที่ นักศึกษาไม่เข้าใจได้ตลอดเวลา

ทีมผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าสื่อการเรียนการสอนแบบฝึกทักษะออกเมนต์เตดเรียลลิตี้ที่น่าจะเป็นผลดีสำหรับตัวนักศึกษาในการเพิ่มทักษะในวิชาแคลคูลัสได้ดียิ่งขึ้น อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการพัฒนาสื่อการเรียนรูปแบบใหม่ทางด้านวิชาคำนวณให้ แก่อาจารย์ผู้สอนอีกประการหนึ่งด้วย หากมีข้อผิดพลาดหรือข้อเสนอแนะประการใด ทีมผู้วิจัยขอน้อมรับไว้เป็นแนวทางในการปรับปรุงแก้ไขในโอกาสต่อไป

ทีมผู้วิจัย



---

# สารบัญ

---

คำนำ	i	
สารบัญ	iv	
1	ปริพันธ์สองชั้น	1
1.1	ทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้น . . . . .	1
1.1.1	การหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่เป็นรูปสี่เหลี่ยม ผืนผ้า . . . . .	1
1.1.2	การหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่เป็นบริเวณปิดใด ๆ .	2
2	การหาพื้นที่โดยใช้ประพันธ์สองชั้น	21
2.1	ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น . . . . .	21
3	ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว	33

3.1	ทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว . . . . .	33
4	การหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว . . . . .	47
4.1	ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบ พิกัดเชิงขั้ว . . . . .	47



# 1

## ปริพันธ์สองชั้น

### 1.1 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้น

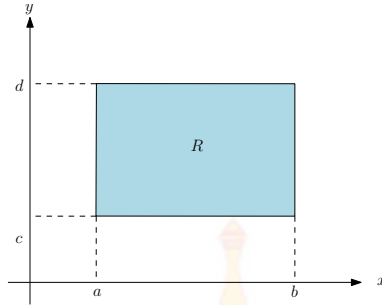
การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร  $f(x, y)$  เป็นการหาปริพันธ์ที่ใช้แนวคิดเดียวกันกับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว กล่าวคือ หากการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวจะนิยามบนช่วงหรือปริภูมิหนึ่งมิติ (One-Dimensional Space) โดยแทนด้วยสัญลักษณ์  $\mathbb{R}$  แล้วการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรก็จะนิยามบนบริเวณในปริภูมิสองมิติ (Two-Dimensional Space) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $\mathbb{R}^2$  นั่นเอง

#### 1.1.1 การหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

กำหนดให้  $R$  เป็นบริเวณที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยที่มีด้านใดด้านหนึ่งขนานกับแกน  $x$  และอีกด้านหนึ่งขนานกับแกน  $y$  โดยที่

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

โดยที่  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1: บริเวณ  $R$  เมื่อ  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณค่าปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

**ทฤษฎีบท 1.1.1.** กำหนดให้  $f(x, y)$  เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า  $R$  โดยที่  $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  แล้วจะได้ว่า

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

### 1.1.2 การหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่เป็นบริเวณปิดใด ๆ

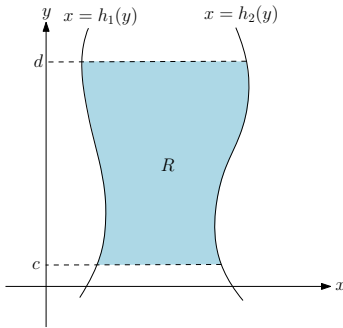
กำหนดให้  $z = f(x, y)$  เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่ต่อเนื่องและนิยามเป็นบริเวณปิด  $R$  (ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า) โดยที่

$$R = \{(x, y) \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

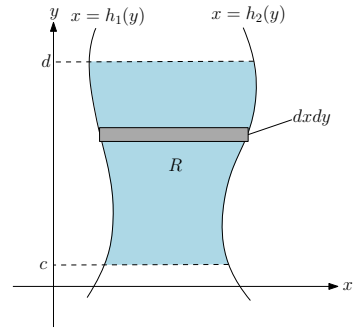
ซึ่งมีบริเวณ ดังรูปที่ 1.2

โดยการวาง strip บนบริเวณ  $R$  ดังรูปที่ 1.3 (strip ขนานแกน  $x$ ) จะได้ว่าปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน  $z = f(x, y)$  บริเวณ  $R$  นิยามโดย





รูปที่ 1.2: บริเวณ  $R$



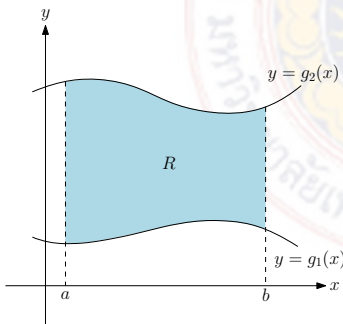
รูปที่ 1.3: การวาง strip บนบริเวณ  $R$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

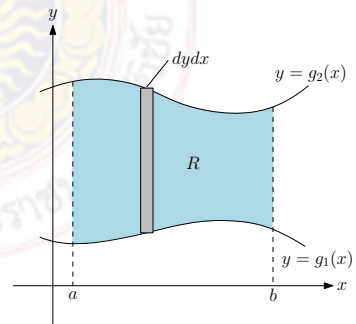
และในทำนองเดียวกันสำหรับบริเวณ  $R$  ที่กำหนดโดย

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

ซึ่งมีบริเวณ ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4: บริเวณ  $R$



รูปที่ 1.5: การวาง strip บนบริเวณ  $R$

โดยการวาง strip บนบริเวณ  $R$  ดังรูปที่ 1.5 (strip ขนานแกน  $y$ ) จะได้ว่าปริพันธ์สองชั้น

ของฟังก์ชัน  $z = f(x, y)$  บริเวณ  $R$  นิยามโดย

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$





ข้อที่ 2. จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R xy dA$  โดยที่

$$R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$$



A series of horizontal dotted lines for writing the solution to the problem. A large, faint watermark of the Rajabhat Buriram University logo is visible in the background, centered on the page. The logo features a central emblem with a crown and a shield, surrounded by Thai text: "มหาวิทยาลัยราชภัฏบรียรัมย์" (Mahavithayalai Rajabhat Buriram) and "วิทยาเขตบรียรัมย์" (Witayakhut Buriram).

1.1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้น

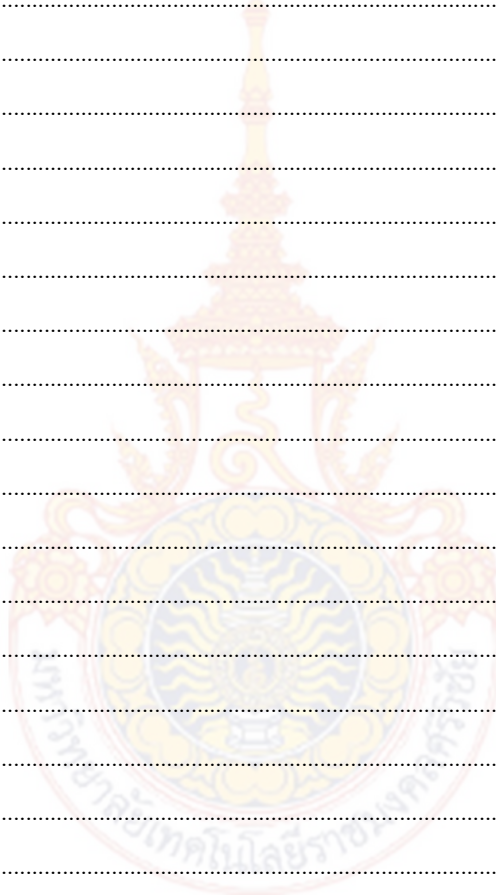


7

ข้อที่ 3. จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R \frac{1}{(x+y)^2} dA$  โดยที่

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

A series of horizontal dotted lines for writing the solution to the problem.







# มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย

หลักสูตรรายวิชาคณิตศาสตร์ สาขาศึกษาทั่วไป คณะศิลปศาสตร์

การทดสอบก่อนเรียน-หลังเรียน

วิชาคณิตศาสตร์ 2 เรื่อง การหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

## คำชี้แจง

1. ข้อสอบมี 6 หน้า ปรนัย 5 ข้อ คิดเป็น 20 คะแนน
2. ให้นักศึกษาเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว
3. ห้ามนำสูตร เอกสารใด ๆ เครื่องคำนวณ และเครื่องมือสื่อสารทุกชนิดเข้ามาในห้องสอบ และไม่หยิบยืมเครื่องเขียนกัน
4. กรอกรายละเอียดประจำตัวของนักศึกษาทุกตำแหน่งที่กำหนดให้

## วัตถุประสงค์

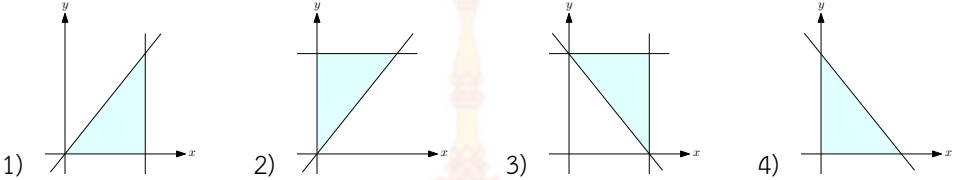
1. สามารถเขียนบริเวณปิดล้อมตามที่กำหนดให้ได้
2. อ่านขอบเขตของการหาปริพันธ์ที่เหมาะสมได้
3. นิยามพื้นที่ของบริเวณปิดล้อมในรูปปริพันธ์สองชั้นได้
4. คำนวณหาค่าพื้นที่ที่ใช้ปริพันธ์สองชั้นได้

ชื่อ-สกุล.....สาขา.....กลุ่มเรียน.....เลขที่.....

## แบบทดสอบก่อนการใช้แบบฝึกหัด AR

ข้อที่ 1. จงใช้บริเวณปิดล้อม  $R$  ที่เกิดจากการตัดกันของกราฟ  $y = 2x$ ,  $x = 2$  และ  $y = 0$  ตอบคำถามข้อที่ 1.1 - 1.4 (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อที่ 1.1 บริเวณปิดล้อม  $R$  ดังรายละเอียดข้างต้นมีลักษณะตรงกับข้อใด



ข้อที่ 1.2 ขอบเขตของการหาปริพันธ์สำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ข้างต้นตรงกับข้อใด

- 1)  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$
- 2)  $R = \{(x, y) \mid 2y \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$
- 3)  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$
- 4)  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 4\}$

ข้อที่ 1.3 พื้นที่  $(A)$  ที่นิยามโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นสำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ตรงกับข้อใด

- 1)  $A = \int_0^2 \int_0^{2x} dx dy$
- 2)  $A = \int_0^2 \int_{2x}^2 dy dx$
- 3)  $A = \int_0^4 \int_0^{\frac{y}{2}} dx dy$
- 4)  $A = \int_0^2 \int_0^{2x} dy dx$

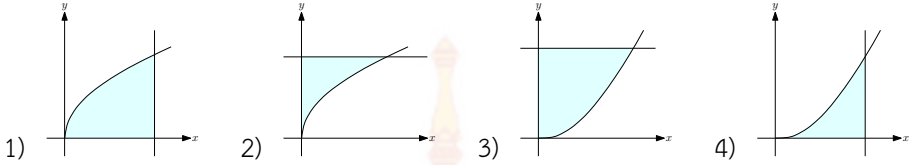
ข้อที่ 1.4 พื้นที่ของบริเวณปิดล้อม  $R$  มีค่าตรงกับข้อใด

- 1) 2 ตารางหน่วย
- 2) 4 ตารางหน่วย
- 3) 6 ตารางหน่วย
- 4) 8 ตารางหน่วย



ข้อที่ 2. จงใช้บริเวณปิดล้อม  $R$  ที่เกิดจากการตัดกันของกราฟ  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 9$  และ  $y = 0$  ตอบคำถามข้อที่ 2.1 - 2.4 (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อที่ 2.1 บริเวณปิดล้อม  $R$  ดังรายละเอียดข้างต้นมีลักษณะตรงกับข้อใด



ข้อที่ 2.2 ขอบเขตของการหาปริพันธ์สำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ข้างต้นตรงกับข้อใด

1)  $R = \{(x, y) \mid y^2 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 3\}$

2)  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 9, \sqrt{x} \leq y \leq 3\}$

3)  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

4)  $R = \{(x, y) \mid 9 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 3\}$

ข้อที่ 2.3 พื้นที่  $(A)$  ที่นิยามโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นสำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ตรงกับข้อใด

1)  $A = \int_0^3 \int_9^{y^2} dx dy$

2)  $A = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$

3)  $A = \int_0^9 \int_{\sqrt{x}}^3 dy dx$

4)  $A = \int_0^3 \int_{y^2}^9 dx dy$

ข้อที่ 2.4 พื้นที่ของบริเวณปิดล้อม  $R$  มีค่าตรงกับข้อใด

1) 22 ตารางหน่วย

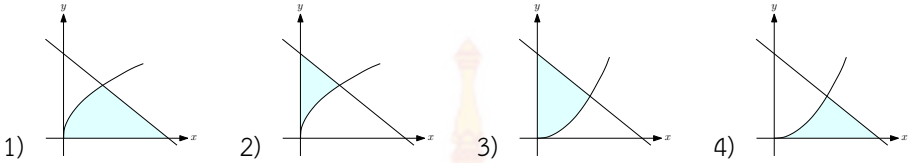
2) 20 ตารางหน่วย

3) 18 ตารางหน่วย

4) 16 ตารางหน่วย

ข้อที่ 3. จงใช้บริเวณปิดล้อม  $R$  ที่เกิดจากการตัดกันของกราฟ  $x = \sqrt{y}$ ,  $y + 2x = 8$  และ  $x = 0$  ตอบคำถามข้อที่ 3.1 - 3.4 (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อที่ 3.1 บริเวณปิดล้อม  $R$  ดังรายละเอียดข้างต้นมีลักษณะตรงกับข้อใด



ข้อที่ 3.2 ขอบเขตของการหาปริพันธ์สำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ข้างต้นตรงกับข้อใด

- 1)  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, x^2 \leq y \leq 8 - 2x\}$
- 2)  $R = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq \frac{y-8}{2}, 0 \leq y \leq 2\}$
- 3)  $R = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq \frac{8-y}{2}, 0 \leq y \leq 4\}$
- 4)  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 8 - 2x\}$

ข้อที่ 3.3 พื้นที่  $(A)$  ที่นิยามโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นสำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ตรงกับข้อใด

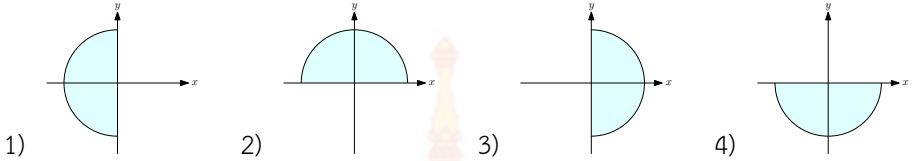
- 1)  $A = \int_0^2 \int_{\sqrt{y}}^{\frac{y-8}{2}} dx dy$
- 2)  $A = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{\frac{8-y}{2}} dx dy$
- 3)  $A = \int_0^2 \int_{x^2}^{8-2x} dy dx$
- 4)  $A = \int_0^4 \int_{x^2}^{8-2x} dy dx$

ข้อที่ 3.4 พื้นที่ของบริเวณปิดล้อม  $R$  มีค่าตรงกับข้อใด

- 1)  $\frac{19}{3}$  ตารางหน่วย
- 2)  $\frac{23}{3}$  ตารางหน่วย
- 3)  $\frac{26}{3}$  ตารางหน่วย
- 4)  $\frac{28}{3}$  ตารางหน่วย

ข้อที่ 4. จงใช้บริเวณปิดล้อม  $R$  ที่เกิดจากการตัดกันของกราฟ  $y = \sqrt{4 - x^2}$  และ  $y = 0$  ตอบคำถามข้อที่ 4.1 - 4.4 (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อที่ 4.1 บริเวณปิดล้อม  $R$  ดังรายละเอียดข้างต้นมีลักษณะตรงกับข้อใด



ข้อที่ 4.2 ขอบเขตของการหาปริพันธ์สำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ข้างต้นตรงกับข้อใด

- 1)  $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$
- 2)  $R = \{(r, \theta) \mid -2 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$
- 3)  $R = \{(r, \theta) \mid -2 \leq r \leq 0, 0 \leq \theta \leq \pi\}$
- 4)  $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

ข้อที่ 4.3 พื้นที่  $(A)$  ที่นิยามโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นสำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ตรงกับข้อใด

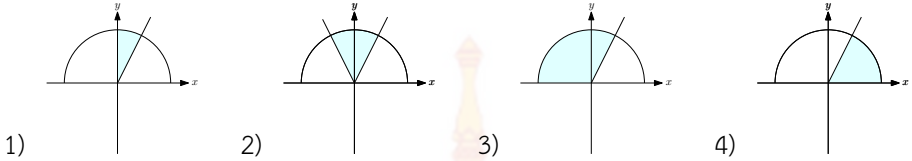
- 1)  $A = \int_0^\pi \int_{-2}^0 r dr d\theta$
- 2)  $A = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r dr d\theta$
- 3)  $A = \int_0^\pi \int_0^2 r dr d\theta$
- 4)  $A = \int_{-2}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r dr d\theta$

ข้อที่ 4.4 พื้นที่ของบริเวณปิดล้อม  $R$  มีค่าตรงกับข้อใด

- 1)  $\pi$  ตารางหน่วย
- 2)  $2\pi$  ตารางหน่วย
- 3)  $\frac{\pi}{2}$  ตารางหน่วย
- 4)  $\frac{3\pi}{2}$  ตารางหน่วย

ข้อที่ 5. จงใช้บริเวณปิดล้อม  $R$  ที่เกิดจากการตัดกันของกราฟ  $y = \sqrt{16 - x^2}$ ,  $x = -4$ ,  $y = \sqrt{3}x$  และ  $y = 0$  ตอบคำถามข้อที่ 5.1 - 5.4 (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อที่ 5.1 บริเวณปิดล้อม  $R$  ดังรายละเอียดข้างต้นมีลักษณะตรงกับข้อใด



ข้อที่ 5.2 ขอบเขตของการหาปริพันธ์สำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ข้างต้นตรงกับข้อใด

1)  $R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 16, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \right\}$

2)  $R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \right\}$

3)  $R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 16, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

4)  $R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \right\}$

ข้อที่ 5.3 พื้นที่  $(A)$  ที่นิยามโดยใช้ปริพันธ์สองชั้นสำหรับบริเวณปิดล้อม  $R$  ตรงกับข้อใด

1)  $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \int_0^4 r dr d\theta$

2)  $A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \int_0^4 r dr d\theta$

3)  $A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \int_0^4 dr d\theta$

4)  $A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \int_0^4 dr d\theta$

ข้อที่ 5.4 พื้นที่ของบริเวณปิดล้อม  $R$  มีค่าตรงกับข้อใด

1)  $\frac{7\pi}{3}$  ตารางหน่วย

2)  $\frac{10\pi}{3}$  ตารางหน่วย

3)  $\frac{13\pi}{3}$  ตารางหน่วย

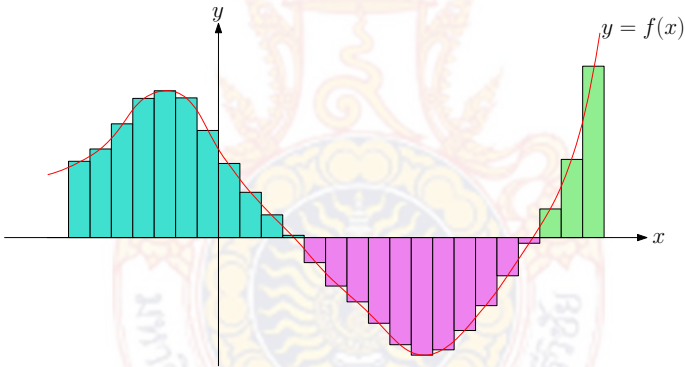
4)  $\frac{16\pi}{3}$  ตารางหน่วย

★★ ทำให้เต็มที่นะครึ้นักศึกษา ... อ.กานต์ ★★



# เฉลยแบบฝึกทักษะ

การหาพื้นที่ของบริเวณใด ๆ โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น



วีระชัย ท่าดี และ เวคิน หนูน่าวงศ์

# 1

## ปริพันธ์สองชั้น

### 1.1 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้น

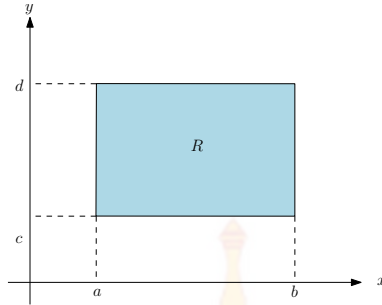
การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร  $f(x, y)$  เป็นการหาปริพันธ์ที่ใช้แนวคิดเดียวกันกับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว กล่าวคือ หากการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวจะนิยามบนช่วงหรือปริภูมิหนึ่งมิติ (One-Dimensional Space) โดยแทนด้วยสัญลักษณ์  $\mathbb{R}$  แล้วการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรก็จะนิยามบนบริเวณในปริภูมิสองมิติ (Two-Dimensional Space) ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $\mathbb{R}^2$  นั่นเอง

#### 1.1.1 การหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

กำหนดให้  $R$  เป็นบริเวณที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยที่มีด้านใดด้านหนึ่งขนานกับแกน  $x$  และอีกด้านหนึ่งขนานกับแกน  $y$  โดยที่

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

โดยที่  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1: บริเวณ  $R$  เมื่อ  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณค่าปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

**ทฤษฎีบท 1.1.1.** กำหนดให้  $f(x, y)$  เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า  $R$  โดยที่  $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  แล้วจะได้ว่า

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

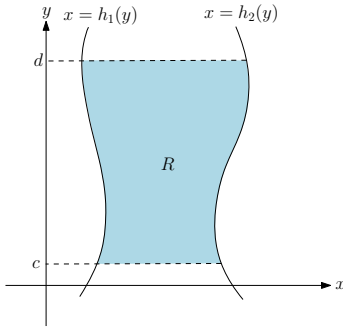
### 1.1.2 การหาปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่เป็นบริเวณปิดใด ๆ

กำหนดให้  $z = f(x, y)$  เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปรที่ต่อเนื่องและนิยามเป็นบริเวณปิด  $R$  (ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า) โดยที่

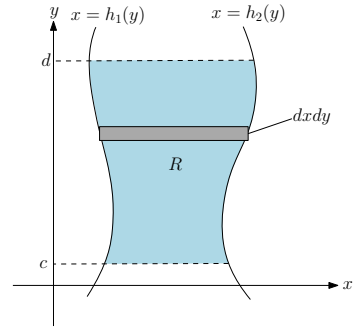
$$R = \{(x, y) \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$$

ซึ่งมีบริเวณ ดังรูปที่ 1.2

โดยการวาง strip บนบริเวณ  $R$  ดังรูปที่ 1.3 (strip ขนานแกน  $x$ ) จะได้ว่าปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน  $z = f(x, y)$  บริเวณ  $R$  นิยามโดย



รูปที่ 1.2: บริเวณ  $R$



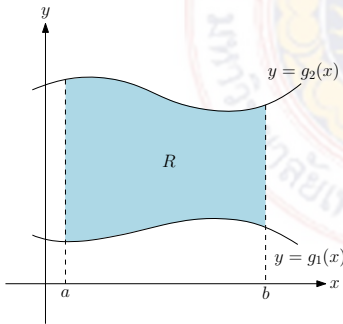
รูปที่ 1.3: การวาง strip บนบริเวณ  $R$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

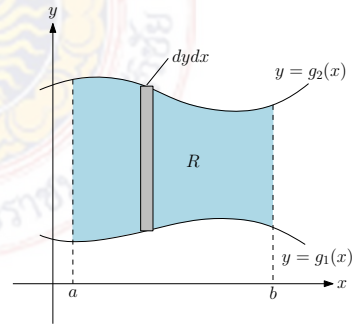
และในทำนองเดียวกันสำหรับบริเวณ  $R$  ที่กำหนดโดย

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

ซึ่งมีบริเวณ ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4: บริเวณ  $R$



รูปที่ 1.5: การวาง strip บนบริเวณ  $R$

โดยการวาง strip บนบริเวณ  $R$  ดังรูปที่ 1.5 (strip ขนานแกน  $y$ ) จะได้ว่าปริพันธ์สองชั้น



ของฟังก์ชัน  $z = f(x, y)$  บริเวณ  $R$  นิยามโดย

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$



## แบบฝึกหัด 1.1.

ข้อที่ 1. จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R (5x - 2y^3) dA$  โดยที่

$$R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$$

วิธีทำ เราสามารถหาค่าปริพันธ์สองชั้นข้างต้นได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \iint_R (5x - 2y^3) dA &= \int_{-2}^3 \int_1^4 (5x - 2y^3) dy dx \\ &= \int_{-2}^3 \left[ 5xy - \frac{2y^4}{4} \right]_1^4 dx \\ &= \int_{-2}^3 \left( (20x - 128) - \left( 5x - \frac{1}{2} \right) \right) dx \\ &= \int_{-2}^3 \left( 20x - 128 - 5x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_{-2}^3 \left( 15x - \frac{255}{2} \right) dx \\ &= \left[ \frac{15x^2}{2} - \frac{255x}{2} \right]_{-2}^3 \\ &= \left( \frac{135}{2} - \frac{756}{2} \right) - \left( \frac{60}{2} - \frac{510}{2} \right) \\ &= \frac{135 - 756 - 60 + 510}{2} \\ &= \frac{1191}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริพันธ์ที่ต้องการมีค่าเท่ากับ  $\frac{1191}{2}$  ■

ข้อที่ 2. จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R xy dA$  โดยที่

$$R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$$

วิธีทำ เราสามารถหาค่าปริพันธ์สองชั้นข้างต้นได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \iint_R xy dA &= \int_0^1 \int_2^5 xy dx dy \\ &= \int_0^1 y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_2^5 dy \\ &= \int_0^1 y \left( \frac{25}{2} - \frac{4}{2} \right) dy \\ &= \frac{21}{2} \int_0^1 y dy \\ &= \frac{21}{2} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{21}{2} \left( \frac{1}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{21}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{21}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริพันธ์ที่ต้องการมีค่าเท่ากับ  $\frac{21}{4}$  ■

**ข้อที่ 3.** จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R \frac{1}{(x+y)^2} dA$  โดยที่

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

**วิธีทำ** เราสามารถหาค่าปริพันธ์สองชั้นข้างต้นได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{1}{(x+y)^2} dA &= \int_0^2 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy dx \\ &= \int_0^2 \int_1^2 (x+y)^{-2} d(x+y) dx \\ &= \int_0^2 \left[ \frac{(x+y)^{-1}}{-1} \right]_1^2 dx \\ &= - \int_0^2 \left[ \frac{1}{x+y} \right]_1^2 dx \\ &= - \int_0^2 \left( \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= - \left( \int_0^2 \frac{1}{x+2} dx - \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx \right) \\ &= - \left( \int_0^2 \frac{1}{x+2} d(x+2) - \int_0^2 \frac{1}{x+1} d(x+1) \right) \\ &= - [\ln|x+2| - \ln|x+1|]_0^2 \\ &= - ((\ln|2+2| - \ln|2+1|) - (\ln|0+2| - \ln|0+1|)) \\ &= - ((\ln 4 - \ln 3) - (\ln 2 - \ln 1)) \\ &= - (\ln 4 - \ln 3 - \ln 2 + \ln 1) \\ &= \ln 2 + \ln 3 - \ln 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริพันธ์ที่ต้องการมีค่าเท่ากับ  $\ln 2 + \ln 3 - \ln 4$  ■

ข้อที่ 4. จงหาค่าของ  $\int_0^4 \int_0^2 4ye^{2x} dx dy$

วิธีทำ เราสามารถหาปริพันธ์สองชั้นข้างต้นได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \int_0^2 4ye^{2x} dx dy &= \int_0^4 \int_0^2 4ye^{2x} \frac{d(2x)}{2} dy \\
 &= \int_0^4 \int_0^2 2ye^{2x} d(2x) dy \\
 &= \int_0^4 2y [e^{2x}]_0^2 dy \\
 &= \int_0^4 2y (e^4 - e^0) dy \\
 &= (e^4 - 1) \int_0^4 2y dy \\
 &= (e^4 - 1) \left[ \frac{2y^2}{2} \right]_0^4 \\
 &= (e^4 - 1) (16 - 0) \\
 &= 16 (e^4 - 1)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\int_0^4 \int_0^2 4ye^{2x} dx dy = 16 (e^4 - 1)$  ■

ข้อที่ 5. จงหาค่าของ  $\int_0^4 \int_0^1 2xye^{2y} dy dx$

วิธีทำ เราสามารถหาค่าปริพันธ์สองชั้นข้างต้นได้ ดังนี้

$$\int_0^4 \int_0^1 2xye^{2y} dy dx = \int_0^4 2x \int_0^1 ye^{2y} dy dx \quad (1.1)$$

พิจารณา  $\int_0^1 ye^{2y} dy$  โดยการใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (Integration By Part) โดยการใช้ตาราง ดังนี้

	$u$	$dv$
+	$y$	$e^{2y}$
-	$1$	$\frac{e^{2y}}{2}$
+	$0$	$\frac{e^{2y}}{4}$

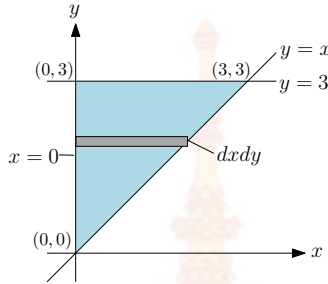
จากตารางและสมการ (1.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^1 2xye^{2y} dy dx &= \int_0^4 2x \left[ \frac{ye^{2y}}{2} - \frac{e^{2y}}{4} \right]_0^1 dx \\ &= \int_0^4 2x \left[ \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} \right) - \left( 0 - \frac{1}{4} \right) \right] dx \\ &= \int_0^4 2x \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) \int_0^4 2x dx \\ &= \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) \left[ \frac{2x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) (16 - 0) \\ &= 8e^2 - 4e^2 + 4 \\ &= 4e^2 + 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\int_0^4 \int_0^1 2xye^{2y} dy dx = 4e^2 + 4$  ■

ข้อที่ 10. จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R e^{y^2} dA$  โดยที่  $R$  เป็นบริเวณปิดล้อมด้วยกราฟของสมการ  $y = x$ ,  $y = 3$  และ  $x = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณ  $R$  ได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 3\}$$

เราสามารถพิจารณา  $\iint_R e^{y^2} dA$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

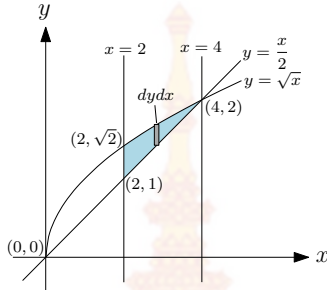
$$\begin{aligned} \iint_R e^{y^2} dA &= \int_0^3 \int_0^y e^{y^2} dx dy \\ &= \int_0^3 e^{y^2} [x]_0^y dy \\ &= \int_0^3 e^{y^2} y dy \\ &= \int_0^3 e^{y^2} y \frac{d(y^2)}{2y} \\ &= \frac{1}{2} [e^{y^2}]_0^3 \\ &= \frac{e^9 - 1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\iint_R e^{y^2} dA = \frac{e^9 - 1}{2}$  ■

ข้อที่ 11. จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R 6xy \, dA$  เมื่อ  $R$  เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟของ

สมการ  $y = \frac{x}{2}$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 2$  และ  $x = 4$

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณ  $R$  ได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 4, \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

เราสามารถพิจารณา  $\iint_R 6xy \, dA$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \iint_R 6xy \, dA &= \int_2^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 6xy \, dydx \\ &= \int_2^4 6x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_2^4 3x \left( (\sqrt{x})^2 - \left( \frac{x}{2} \right)^2 \right) dx \\ &= \int_2^4 3x \left( x - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= \int_2^4 3x \left( \frac{4x - x^2}{4} \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \int_2^4 (4x^2 - x^3) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \left[ \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_2^4 \\
&= \frac{3}{4} \left( \left( \frac{256}{3} - \frac{256}{4} \right) - \left( \frac{32}{3} - \frac{16}{4} \right) \right) \\
&= \frac{3}{4} \left( \frac{64}{3} - \frac{20}{3} \right) \\
&= \frac{3}{4} \left( \frac{44}{3} \right) \\
&= 11
\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\iint_R e^{y^2} dA = 11$  ■



**ข้อที่ 12.** จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R x^2 dA$  เมื่อ  $R$  เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟของสมการ  $y = x^2$  และ  $3x^2 + y = 4$

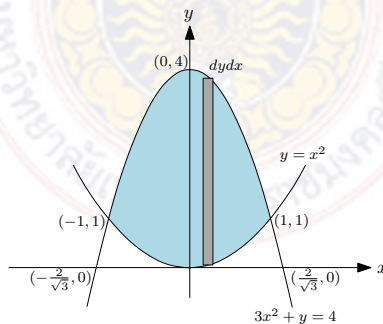
**วิธีทำ** เนื่องจากสมการ  $3x^2 + y = 4$  จะมีกราฟเป็นพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด  $(0, 4)$  และมีจุดตัดแกน  $x$  อยู่ที่จุด  $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$  และจุด  $(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0)$  สมการ  $y = x^2$  จะมีกราฟเป็นพาราโบลาหงายซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด  $(0, 0)$  ซึ่งจากรายละเอียดของกราฟของทั้งสองสมการที่กล่าวมาแล้วข้างต้นเราพบว่ากราฟทั้งสองเส้นจะมีจุดตัดกันอยู่สองจุด ซึ่งเราสามารถพิจารณาจุดตัดของกราฟ  $y = x^2$  และ  $3x^2 + y = 4$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$3x^2 + x^2 = 4$$

$$4x^2 = 4$$

$$x = \pm 1$$

ถ้า  $x = -1$  จะได้  $y = (-1)^2 = 1$  และจะได้จุดตัดกันของกราฟเป็นจุด  $(-1, 1)$  ถ้า  $x = 1$  จะได้  $y = 1^2 = 1$  และจะได้จุดตัดกันของกราฟเป็นจุด  $(1, 1)$  ทำให้เราสามารถสร้างบริเวณ  $R$  ได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - 3x^2\}$$

ข้อที่ 13. จงหาค่าปริพันธ์  $\iint_R \frac{16xy(x^2 + 1)^3}{x^4 - x^6} dA$  เมื่อ  $R$  เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วย

กราฟของสมการ  $y = x^2$  และ  $y = x^3$

วิธีทำ เนื่องจากเมื่อเราลากกราฟเส้นโค้งจากทั้งสองสมการเราพบว่ากราฟมีจุดตัดกันทั้งสี่เส้นสองจุด ดังนั้นในขั้นตอนแรกเราจะคำนวณหาจุดตัดกันของกราฟ  $y = x^2$  และ  $y = x^3$  ตามกระบวนการดังต่อไปนี้

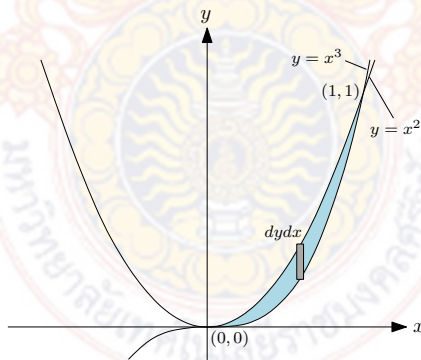
$$x^2 = x^3$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x - 1) = 0$$

$$x = 0, 1$$

ถ้า  $x = 0$  จะได้  $y = 0$  จุดตัดที่ต้องการคือ  $(0, 0)$  และถ้า  $x = 1$  จะได้  $y = 1$  และจุดตัดที่ได้คือ  $(1, 1)$  ซึ่งจะมีกราฟดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$$

เราสามารถพิจารณา  $\iint_R \frac{16xy(x^2+1)^3}{x^4-x^6} dA$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{16xy(x^2+1)^3}{x^4-x^6} dA &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \frac{16xy(x^2+1)^3}{x^4-x^6} dy dx \\
 &= \int_0^1 \frac{16x(x^2+1)^3}{x^4-x^6} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{8x(x^2+1)^3}{x^4-x^6} (x^4-x^6) dx \\
 &= \int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx \\
 &= \int_0^1 8x(x^2+1)^3 d\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) \\
 &= \int_0^1 4(x^2+1)^3 d(x^2+1) \\
 &= \left[ \frac{4(x^2+1)^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= 2^4 - 1 \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\iint_R \frac{16xy(x^2+1)^3}{x^4-x^6} dA = 15$  ■

ข้อที่ 15. จงหาค่าของ  $\iint_R \frac{6x(x^2 + 3)^2}{8 - 2x - x^2} dA$  เมื่อ  $R$  เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟ  $x = \sqrt{y}$ ,  $y + 2x = 8$  และ  $x = 0$

วิธีทำ เนื่องจากสมการ  $x = \sqrt{y}$  สามารถเขียนกราฟเป็นกราฟพาราโบลาหงาย โดยที่  $x \geq 0$  และสมการ  $y + 2x = 8$  จะเป็นกราฟเส้นตรงที่ตัดแกน  $x$  และแกน  $y$  ที่จุด  $(4, 0)$  และ  $(0, 8)$  ตามลำดับ และเราจะพบว่ากราฟทั้งเส้นจะมีจุดตัดกันในจุดภาคที่หนึ่งจำนวน 1 จุด ซึ่งเราสามารถพิจารณาจุดตัดของกราฟ  $x = \sqrt{y}$  และ  $y + 2x = 8$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

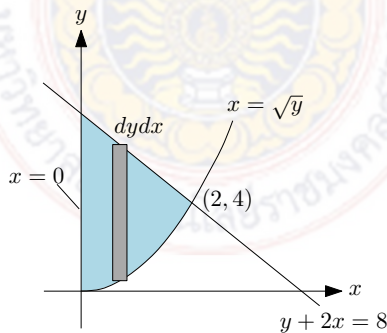
$$x^2 = 8 - 2x$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x = -4, 2$$

เนื่องจากจุดตัดที่เรากำลังพิจารณาเป็นจุดที่อยู่ในจุดภาคที่หนึ่ง ดังนั้นเราเลือก  $x = 2$  ซึ่งจะได้  $y = 2^2 = 4$  ทำให้ได้ว่าจุด  $(2, 4)$  เป็นจุดตัดกันของกราฟที่เราต้องการ และเราสามารถสร้างบริเวณ  $R$  ได้ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 8 - 2x\}$$

เราสามารถพิจารณา  $\iint_R \frac{6x(x^2 + 3)^2}{8 - 2x - x^2} dA$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{6x(x^2 + 3)^2}{8 - 2x - x^2} dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^{8-2x} \frac{6x(x^2 + 3)^2}{8 - 2x - x^2} dy dx \\
 &= \int_0^2 \frac{6x(x^2 + 3)^2}{8 - 2x - x^2} [y]_{x^2}^{8-2x} dx \\
 &= \int_0^2 \frac{6x(x^2 + 3)^2}{8 - 2x - x^2} (8 - 2x - x^2) dx \\
 &= \int_0^2 6x(x^2 + 3)^2 \frac{d(x^2 + 3)}{2x} \\
 &= \left[ \frac{3(x^2 + 3)^3}{3} \right]_0^2 \\
 &= 7^3 - 3^3 \\
 &= 343 - 27 \\
 &= 316
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\iint_R \frac{6x(x^2 + 3)^2}{8 - 2x - x^2} dA = 316$  ■

## เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

ข้อที่ 1.  $-\frac{1191}{2}$

ข้อที่ 2.  $\frac{21}{4}$

ข้อที่ 3.  $\ln 2 + \ln 3 - \ln 4$

ข้อที่ 4.  $16(e^4 - 1)$

ข้อที่ 5.  $4e^2 + 4$

ข้อที่ 6. 0

ข้อที่ 7.  $-4$

ข้อที่ 8. 9

ข้อที่ 9.  $\frac{17}{12}$

ข้อที่ 10.  $\frac{e^9 - 1}{2}$

ข้อที่ 11. 11

ข้อที่ 12.  $\frac{16}{15}$

ข้อที่ 13. 15

ข้อที่ 14.  $\frac{2}{9}(\sqrt{8} - 1)$

ข้อที่ 15. 316



# 2

## การหาพื้นที่โดยใช้ประพันธ์สองชั้น

### 2.1 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

จากการศึกษาปริพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราเคยใช้ปริพันธ์ในการหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้งมาแล้ว แต่เรายังสามารถใช้ปริพันธ์สองชั้นในการหาพื้นที่ของบริเวณ  $R$  ซึ่งเป็นบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้งได้เช่นกัน โดยการแบ่งบริเวณที่เราพิจารณาออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดเล็ก และให้  $dA$  แทนบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีขนาดเล็กที่แบ่งได้ เมื่อเรานำพื้นที่ของ  $dA$  แต่ละรูปมารวมกันผ่านการหาปริพันธ์ในรูป

$$A = \iint_R dA$$

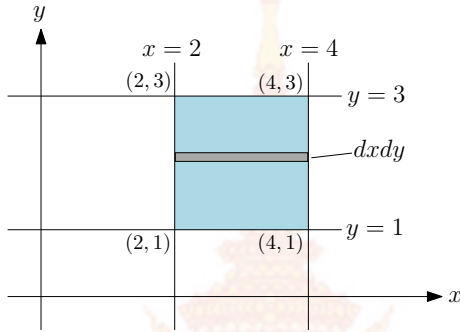
โดยที่  $A$  แทนพื้นที่ของบริเวณ  $R$  ซึ่งมีความหมายเดียวกับการหาปริมาตรของทรงตันบนบริเวณ  $R$  โดยที่ความสูงของทรงตันนั้นจะถูกแทนด้วย  $f(x, y)$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 สำหรับทุก ๆ จุดบนบริเวณ  $R$



## แบบฝึกหัด 2.1.

ข้อที่ 1. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของสมการ  $x = 2$ ,  $x = 4$ ,  $y = 1$  และ  $y = 3$  โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

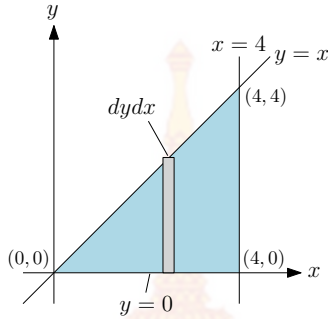
$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA \\ &= \int_1^3 \int_2^4 dx dy \\ &= \int_1^3 [x]_2^4 dy \\ &= 2 \int_1^3 dy \\ &= 2 [y]_1^3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ 4 ตารางหน่วย



ข้อที่ 2. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของสมการ  $y = 0$ ,  $x = 4$  และ  $y = x$  โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณ  $R$  ได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

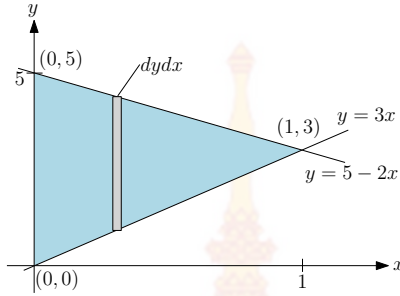
$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA \\ &= \int_0^4 \int_0^x dy dx \\ &= \int_0^4 [y]_0^x dx \\ &= \int_0^4 x dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \frac{16}{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ 8 ตารางหน่วย



ข้อที่ 3. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของสมการ  $y = 5 - 2x$ ,  $y = 3x$  และ  $x = 0$  โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 3x \leq y \leq 5 - 2x\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

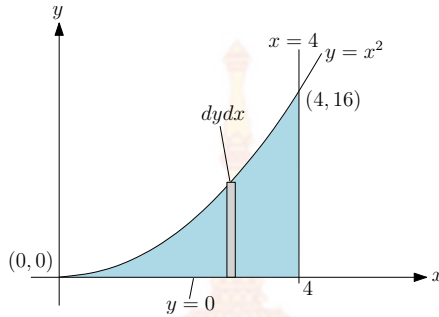
$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA \\ &= \int_0^1 \int_{3x}^{5-2x} dy dx \\ &= \int_0^1 [y]_{3x}^{5-2x} dx \\ &= \int_0^1 (5 - 2x - 3x) dx \\ &= \int_0^1 (5 - 5x) dx \\ &= \left[ 5x - \frac{5x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $\frac{5}{2}$  ตารางหน่วย

■

ข้อที่ 4. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของสมการ  $y = x^2$ ,  $x = 4$  และ  $y = 0$  โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x^2\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

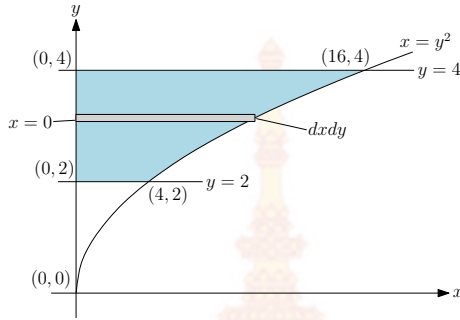
$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA \\ &= \int_0^4 \int_0^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^4 [y]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^4 x^2 dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^4 \\ &= \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $\frac{64}{3}$  ตารางหน่วย



ข้อที่ 5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของสมการ  $x = y^2$ ,  $y = 2$ ,  $y = 4$  และ  $x = 0$  โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 2 \leq y \leq 4\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA \\ &= \int_2^4 \int_0^{y^2} dx dy \\ &= \int_2^4 [x]_0^{y^2} dy \\ &= \int_2^4 y^2 dx \\ &= \left[ \frac{y^3}{3} \right]_2^4 \\ &= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $\frac{56}{3}$  ตารางหน่วย



**ข้อที่ 6.** จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของสมการ  $y = 8 - x^2$  และ  $y = x^2$  โดยใช้ปริพันธ์สองชั้น

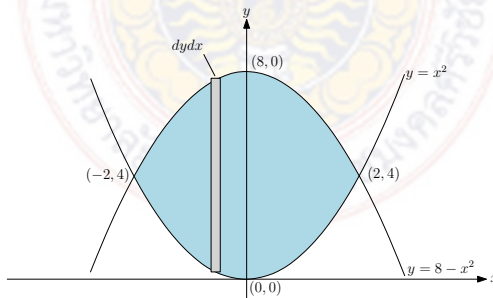
**วิธีทำ** พิจารณาจุดตัดกันของกราฟ  $y = 8 - x^2$  และ  $y = x^2$  ซึ่งทำได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}x^2 &= 8 - x^2 \\x^2 + x^2 &= 8 \\2x^2 &= 8 \\x^2 &= 4 \\x &= \pm 2\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า

- ถ้า  $x = 2$  จะได้  $y = 2^2 = 4$  และจุดตัดของกราฟที่ได้คือจุด  $(2, 4)$
- ถ้า  $x = -2$  จะได้  $y = (-2)^2 = 4$  และจุดตัดของกราฟที่ได้คือจุด  $(-2, 4)$

และเราสามารถสร้างบริเวณได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของบริเวณ  $R$  จะได้ว่า

$$R = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 8 - x^2\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R dA \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} dy dx \\
 &= \int_{-2}^2 [y]_{x^2}^{8-x^2} dx \\
 &= \int_{-2}^2 (8 - x^2 - x^2) dx \\
 &= \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx \\
 &= \left[ 8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\
 &= \left( 16 - \frac{16}{3} \right) - \left( -16 + \frac{16}{3} \right) \\
 &= 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} \\
 &= 32 - \frac{32}{3} \\
 &= \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $\frac{64}{3}$  ตารางหน่วย



## เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

ข้อที่ 1. 4

ข้อที่ 3.  $\frac{5}{2}$

ข้อที่ 5.  $\frac{56}{3}$

ข้อที่ 7. 1

ข้อที่ 9.  $\frac{81}{4}$

ข้อที่ 2. 8

ข้อที่ 4.  $\frac{64}{3}$

ข้อที่ 6.  $\frac{64}{3}$

ข้อที่ 8.  $\frac{95}{3}$

ข้อที่ 10.  $\frac{110}{3}$





# 3

## ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

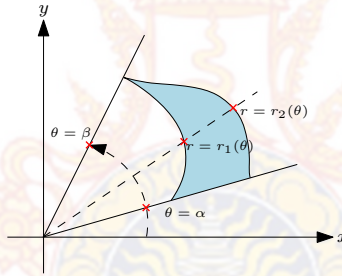
### 3.1 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

จากการศึกษาเกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นเราพบว่าตัวอย่างของการปริพันธ์สองชั้นทั้งหมดนั้น เป็นการหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉาก ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะทำการศึกษาค้นคว้าหาปริพันธ์สองชั้นที่พิจารณาบนบริเวณ  $R$  บางรูปแบบและไม่สามารถคำนวณค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดฉากได้ง่ายนัก เราจึงมีความจำเป็นที่จะต้องนำปริพันธ์สองชั้นดังกล่าวไปคำนวณค่าในพิกัดอื่นที่เหมาะสมกว่า ซึ่งเราจะเรียกปริพันธ์สองชั้นนี้ว่า ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว (Double Integral in Polar Coordinates) ซึ่งสามารถเขียนปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉากให้เป็นปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ในรูป

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R(r, \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

โดยที่

- $r$  คือ จุดตัดบนของของบริเวณ  $R$  ที่เกิดจากการลากเส้นตรงที่ลากตามแนวของรัศมีเริ่มจากจุดกำเนิดหรือชี้ผ่านบริเวณ  $R$  โดยที่การลากเส้นตรงนั้นจะต้องมีมุม  $\theta$  คงตัว ดังรูปที่ 3.1 โดยที่เส้นตรงดังกล่าวจะลากตัดกับของของบริเวณ  $R$  ได้มากที่สุดสองครั้ง ซึ่งด้านในสุดและด้านนอกสุดจะตัดขอบของ  $R$  ซึ่งเป็นเส้นโค้ง  $r = r_1(\theta)$  และเส้นโค้ง  $r = r_2(\theta)$  ตามลำดับ กล่าวคือ  $r = r_1(\theta) \leq r \leq r = r_2(\theta)$
- $\theta$  คือ มุมที่เกิดจากการหมุนเส้นรังสีจากแนวแกน  $x$  ฝั่งบวกในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา รอบจุดกำเนิดหรือชี้วนหนึ่งรอบ ดังรูปที่ 3.1 ซึ่งเราจะกำหนดให้  $\theta = \alpha$  และ  $\theta = \beta$  เป็นมุมที่มีขนาดเล็กที่สุดและมุมที่มีขนาดใหญ่ที่สุด ที่เกิดจากเส้นรังสีหมุนไปตัดกับบริเวณ  $R$  ตามลำดับ กล่าวคือ  $\alpha \leq \theta \leq \beta$



รูปที่ 3.1: ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\iint_{R(r,\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

และความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากกับระบบพิกัดเชิงขั้วที่ต้องทราบคือ

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$



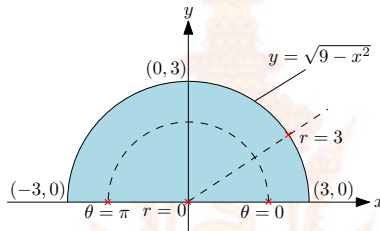
## แบบฝึกหัด 3.1.

ข้อที่ 1. จงเปลี่ยนปริพันธ์  $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (2+x^2+y^2) dydx$  ให้เป็นปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วพร้อมหาค่า

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถเขียนขอบเขตของการหาปริพันธ์ได้เป็น

$$R = \left\{ (x, y) \mid -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \right\}$$

และสามารถเขียนบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$R_{(r,\theta)} = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (2+x^2+y^2) dydx &= \int_0^\pi \int_0^3 (2+r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^3 (2r+r^3) dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ r^2 + \frac{r^4}{4} \right]_0^3 d\theta \\ &= \int_0^\pi \left( 9 + \frac{81}{4} \right) d\theta \\ &= \frac{117}{4} \int_0^\pi d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{117}{4} [\theta]_0^\pi \\
 &= \frac{117}{4} \pi \\
 \text{ดังนั้น } \int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (2+x^2+y^2) dy dx &= \frac{117}{4} \pi
 \end{aligned}$$

■

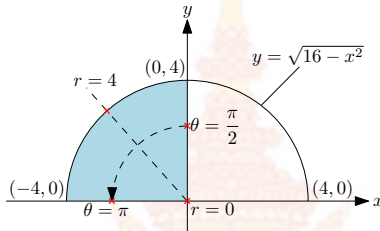


ข้อที่ 2. จงเปลี่ยนปริพันธ์  $\int_{-4}^0 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} e^{2-x^2-y^2} dy dx$  ให้เป็นปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วพร้อมหาค่า

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถเขียนขอบเขตของการหาปริพันธ์ได้เป็น

$$R = \left\{ (x, y) \mid -4 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2} \right\}$$

และสามารถเขียนบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$R_{(r,\theta)} = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 4, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \right\}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_{-4}^0 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} e^{2-x^2-y^2} dy dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^4 e^{2-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^4 e^{2-r^2} r \frac{d(2-r^2)}{-2r} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[ e^{2-r^2} \right]_0^4 d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (e^{-14} - e^2) d\theta \\ &= -\left( \frac{e^{-14} - e^2}{2} \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \\ &= -\left( \frac{e^{-14} - e^2}{2} \right) [\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \end{aligned}$$

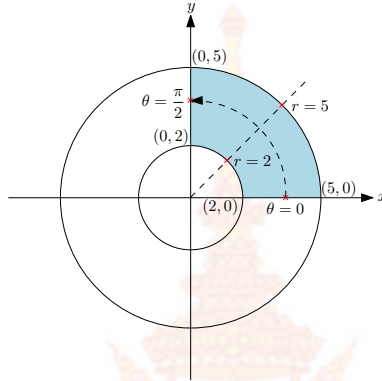
$$\begin{aligned}
 &= -\left(\frac{e^{-14} - e^2}{2}\right) \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -\left(\frac{e^{-14} - e^2}{2}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -\frac{(e^{-14} - e^2)\pi}{4} \\
 \text{ดังนั้น } \int_{-4}^0 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} e^{2-x^2-y^2} dy dx &= -\frac{(e^{-14} - e^2)\pi}{4}
 \end{aligned}$$



ข้อที่ 4. จงหาปริพันธ์  $\iint_R 2xy \, dA$  เมื่อ  $R$  เป็นบริเวณที่ล้อมด้วยวงกลม  $x^2 + y^2 = 4$

และวงกลม  $x^2 + y^2 = 25$  ในจุดภาคที่ 1

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถเขียนบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตของการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$R_{(r,\theta)} = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \iint_R 2xy \, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^5 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^5 2r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta \sin \theta \left[ \frac{r^4}{4} \right]_2^5 \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta \sin \theta (5^4 - 2^4) \, d\theta \\ &= \frac{609}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta \\ &= \frac{609}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\frac{2\theta}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{609}{8} [-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{609}{8} (\cos \pi - \cos 0) \\
 &= -\frac{609}{8} (-1 - 1) \\
 &= \frac{609}{4}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\iint_R 2xy \, dA = \frac{609}{4}$



ข้อที่ 6. จงหาค่า  $\iint_R \sin \theta \, dA$  เมื่อ  $R$  เป็นบริเวณในกราฟ  $r = 4 + 4 \cos \theta$  และอยู่

นอกกราฟ  $r = 4$  ในจุดภาคที่ 1

วิธีทำ พิจารณาสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วเราพบว่าสมการ  $r = 4 + 4 \cos \theta$  จะมีกราฟเป็นรูปคาร์ดิออยด์ที่วางตัวไปตามแกน  $x$  ฝั่งบวก และสมการ  $r = 4$  จะมีกราฟเป็นรูปวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดหรือขั้ว และเพื่อความชัดเจนในการหาขอบเขตสำหรับปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เราจะพิจารณาจุดตัดกันของกราฟ  $r = 4 + 4 \cos \theta$  และ  $r = 4$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

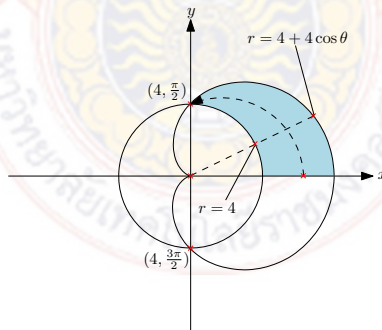
$$4 = 4 + 4r \cos \theta$$

$$0 = 4 \cos \theta$$

$$\cos \theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

ทำให้ได้ว่าจุดตัดกันของกราฟจากทั้งสองสมการคือ  $(4, \frac{\pi}{2})$  และ  $(4, \frac{3\pi}{2})$  ซึ่งทำให้เราสามารถเขียนบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$R_{(r,\theta)} = \left\{ (r, \theta) \mid 4 \leq r \leq 4 + 4 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

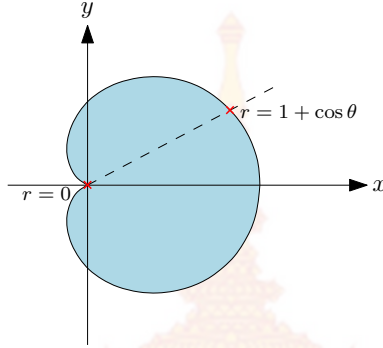
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \iint_R \sin \theta \, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_4^{4+4 \cos \theta} \sin \theta \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \left[ \frac{r^2}{2} \right]_4^{4+4 \cos \theta} \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \left( (4+4 \cos \theta)^2 - 16 \right) \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (16 + 32 \cos \theta + 16 \cos^2 \theta - 16) \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (32 \cos \theta + 16 \cos^2 \theta) \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} 32 \sin \theta \cos \theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin 2\theta \, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin 2\theta \, d\left(\frac{2\theta}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin \theta \cos^2 \theta \, d\left(\frac{\cos \theta}{-\sin \theta}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 8(-\cos 2\theta) - 16 \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( -8 \cos \pi - \frac{16}{3} \cos^3 \frac{\pi}{2} \right) - \left( -8 \cos 0 - \frac{16}{3} \cos^3 0 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( -8(-1) - \frac{16}{3}(0) \right) - \left( -8(1) - \frac{16}{3}(1) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( 16 + \frac{16}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{3} \\
 &= \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\iint_R \sin \theta \, dA = \frac{32}{3}$  ■

ข้อที่ 9. จงหาค่าของ  $\iint_R y(x^2 + y^2)^2 dA$  เมื่อ  $R$  เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟของสมการ  $r = 1 + \cos \theta$

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$R_{(r,\theta)} = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \iint_R y(x^2 + y^2)^2 dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r \sin \theta \cdot r^4 r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r^6 \sin \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin \theta \left[ \frac{r^7}{7} \right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{7} \int_0^{2\pi} \sin \theta (1 + \cos \theta)^7 d\theta \\ &= \frac{1}{7} \int_0^{2\pi} \sin \theta (1 + \cos \theta)^7 \frac{d(1 + \cos \theta)}{-\sin \theta} \\ &= -\frac{1}{7} \left[ \frac{(1 + \cos \theta)^8}{8} \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{56} ((1 + \cos 2\pi) - (1 + \cos 0)) \\
 &= -\frac{1}{56} (2 - 2) \\
 &= -\frac{1}{56} (0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\iint_R y(x^2 + y^2)^2 dA = 0$



## เฉลยแบบฝึกหัด 3.1

ข้อที่ 1.  $\frac{117\pi}{4}$

ข้อที่ 2.  $-\frac{(e^{-14} - e^2)\pi}{4}$

ข้อที่ 3. 54

ข้อที่ 4.  $\frac{609}{4}$

ข้อที่ 5.  $(e - 1)2\pi$

ข้อที่ 6.  $\frac{32}{3}$

ข้อที่ 7.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

ข้อที่ 8.  $\frac{(1 - \cos 1)\pi}{4}$

ข้อที่ 9. 0

ข้อที่ 10.  $336\pi$



# 4

## การหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

### 4.1 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาพื้นที่โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

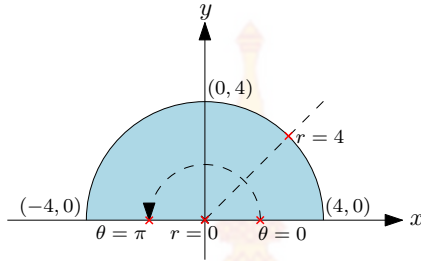
เราสามารถหาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณปิดล้อม  $R$  โดยใช้ปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$A = \iint_{R(r,\theta)} r dr d\theta$$

## แบบฝึกหัด 4.1.

ข้อที่ 1. จงหาพื้นที่ของบริเวณปิดล้อมของกราฟ  $y = \sqrt{16 - x^2}$  และ  $y = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้ว่า

$$R(r, \theta) = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \int_0^4 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^4 d\theta \\ &= 8 \int_0^\pi d\theta \\ &= 8 [\theta]_0^\pi \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

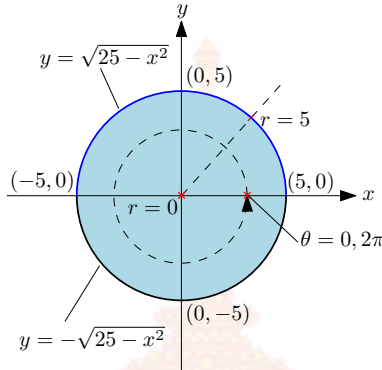
ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $8\pi$  ตารางหน่วย





ข้อที่ 2. จงหาพื้นที่ของบริเวณปิดล้อมด้วยกราฟ  $y = \sqrt{25 - x^2}$  และ  $y = -\sqrt{25 - x^2}$

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วจะได้ว่า

$$R(r, \theta) = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่  $(A)$  ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

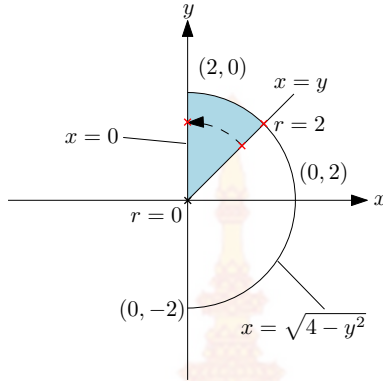
$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^5 d\theta \\ &= \frac{25}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{25}{2} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{25}{2} \cdot 2\pi \\ &= 25\pi \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $25\pi$  ตารางหน่วย



ข้อที่ 3. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟ  $x = \sqrt{4 - y^2}$ ,  $x = y$  และ  $x = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วจะได้ว่า

$$R(r, \theta) = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

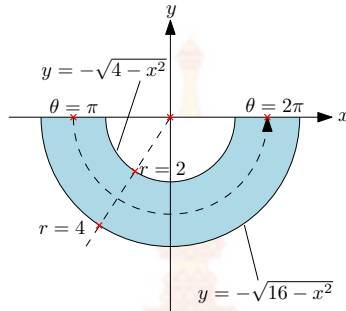
$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\theta \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= 2 [\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $\frac{\pi}{2}$  ตารางหน่วย



ข้อที่ 4. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟ  $y = -\sqrt{4 - x^2}$ ,  
 $y = -\sqrt{16 - x^2}$  และ  $y = 0$

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ว่า

$$R_{(r,\theta)} = \{(r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 4, \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่ ( $A$ ) ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

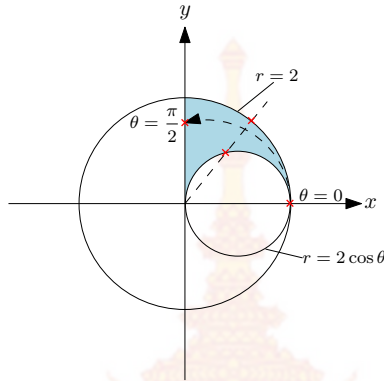
$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi}^{2\pi} \int_2^4 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_2^4 \, d\theta \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \left( \frac{16 - 4}{2} \right) \, d\theta \\ &= 6 \int_{\pi}^{2\pi} \, d\theta \\ &= 6 [\theta]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 6 (2\pi - \pi) \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $6\pi$  ตารางหน่วย



ข้อที่ 5. จงหาพื้นที่ของบริเวณอยู่ด้านในกราฟ  $r = 2$  และอยู่นอกกราฟ  $r = 2 \cos \theta$  ในจตุภาคที่ 1

วิธีทำ จากโจทย์เราสามารถสร้างบริเวณปิดล้อมได้ ดังรูป



พิจารณาขอบเขตการหาปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วจะได้ว่า

$$R(r, \theta) = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \cos \theta \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

เราสามารถพิจารณาพื้นที่  $(A)$  ของบริเวณ  $R$  ได้ตามกระบวนการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{2 \cos \theta}^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{2 \cos \theta}^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - (2 \cos \theta)^2) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - 4 \cos^2 \theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left( 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left( 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, d\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \, \frac{d(2\theta)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} [2\theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} ((\pi - \sin \pi) - (0 - \sin 0)) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $\frac{\pi}{2}$  ตารางหน่วย



## เฉลยแบบฝึกหัด 4.1

ข้อที่ 1.  $8\pi$

ข้อที่ 2.  $25\pi$

ข้อที่ 3.  $\frac{\pi}{2}$

ข้อที่ 4.  $6\pi$

ข้อที่ 5.  $\frac{\pi}{2}$

ข้อที่ 6.  $6\pi$

ข้อที่ 7.  $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

ข้อที่ 8.  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

ข้อที่ 9.  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

ข้อที่ 10.  $\frac{5\pi}{4}$

